

Hauptprüfung Abiturprüfung 2020

Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie B2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

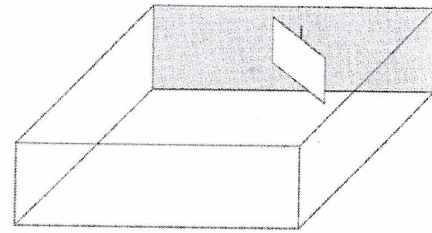
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2020

Aufgabe B 2:

In einem Klassenzimmer befindet sich eine rechteckige Projektionsfläche. Ihre Eckpunkte werden in einem Koordinatensystem durch die Punkte $A(0|4,4|1)$, $B(1|6,8|1)$, $C(1|6,8|2,6)$ und $D(0|4,4|2,6)$ dargestellt (alle Koordinatenangaben in Meter). Die Klassenzimmerwand hinter der Projektionsfläche liegt in einer Ebene, die durch die x_2x_3 -Ebene beschrieben wird.



- a) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen der Projektionsfläche.
Die Punkte A, B, C und D liegen in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Berechnen Sie die Weite des Winkels, den die Projektionsfläche und die dahinter liegende Wand des Klassenzimmers einschließen.
(Teilergebnis: E: $12x_1 - 5x_2 = -22$)
- (4 Punkte)
- b) Ein Schüler zielt mit einem Laserpointer auf die Projektionsfläche. Die Lichtquelle wird im Modell durch den Punkt $L(4|2|1)$ dargestellt, der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ beschreibt die Richtung des Laserstrahls.
Überprüfen Sie, ob der Laserstrahl die Projektionsfläche trifft.
- (2,5 Punkte)
- Die Projektionsfläche ist so befestigt, dass sie sich um eine vertikale Achse drehen lässt. Im Modell lassen sich mögliche Lagen der Projektionsfläche durch Ebenen der Schar
- $$E_a : 12x_1 + 5ax_2 = 28a + 6 ; a \in \mathbb{R}$$
- beschreiben.
- c) Weisen Sie nach, dass der Mittelpunkt der Strecke CD in jeder Ebene der Schar liegt.
Die Drehachse wird im Modell durch eine Strecke beschrieben.
Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die diese Strecke enthält.
- (1,5 Punkte)
- d) Begründen Sie, dass die Ebene E_1 eine Lage beschreibt, in der die Projektionsfläche an der dahinterliegenden Wand anstößt.
- (2 Punkte)

Lösungen

Aufgabe B2:

a) Länge der Diagonalen

Die Diagonale ist die Strecke AC.

$$|\overline{AC}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2,4 \\ 1,6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + 2,4^2 + 1,6^2} \approx 3,05$$

Die Diagonale ist ungefähr 3,05 Meter lang.

Koordinatengleichung von E:

Aufstellen der Parameterform mit Hilfe der Punkte A, B, C:

$$\text{Parameterform von E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4,4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2,4 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von E: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2,4 \\ 1,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,84 \\ -1,6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatengleichung: $3,84x_1 - 1,6x_2 = d$

Einsetzen des Punktes A(0|4,4|1) in E: $-1,6 \cdot 4,4 = d \Rightarrow d = -7,04$

Koordinatengleichung von E: $3,84x_1 - 1,6x_2 = -7,04$

Die Ebene stimmt mit dem Teilergebnis überein, wenn man die Koordinatengleichung mit 3,125 durchmultipliziert.

Koordinatengleichung von E: $12x_1 - 5x_2 = -22$

Winkel

$$\text{Normalenvektor von E: } \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor der Klassenzimmerwand (} x_2x_3\text{-Ebene): } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{144 + 25} \cdot 1} = \frac{12}{13} \Rightarrow \alpha \approx 22,6^\circ$$

b) Prüfung, ob Laserstrahl Projektionsfläche trifft

Aufstellen einer Gerade g, die den Strahl beschreibt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene E.

$$12 \cdot (4 - 5t) - 5 \cdot (2 + 6t) = -22$$

$$\Leftrightarrow 48 - 60t - 10 - 30t = -22$$

$$\Leftrightarrow -90t = -60$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

Einsetzen des t-Wertes in g ergibt den Schnittpunkt $S(\frac{2}{3} | 6 | \frac{7}{3})$

Nun ist noch zu prüfen, ob der Punkt S innerhalb des Rechtecks ABCD liegt.

Dies ist der Fall, wenn die Koordinaten von S jeweils „zwischen“ den Koordinaten der Eckpunkte ABCD liegen.

$$x_1\text{-Koordinate: } 0 < \frac{2}{3} < 1 \quad x_2\text{-Koordinate: } 4,4 < 6 < 6,8 \quad x_3\text{-Koordinate: } 1 < \frac{7}{3} < 2,6$$

Da diese Bedingung erfüllt ist, trifft der Laserstrahl die Projektionsfläche.

c) Nachweis

$$\text{Mittelpunkt von CD: } M_{CD}(\frac{1+0}{2} | \frac{6,8+4,4}{2} | \frac{2,6+2,6}{2}) , \text{ also } M_{CD}(0,5 | 5,6 | 2,6)$$

Einsetzen des Punktes in die Ebenenschar:

$$12 \cdot 0,5 + 5a \cdot 5,6 = 28a + 6 \quad \Leftrightarrow 28a + 6 = 28a + 6$$

Dies ist eine wahre Aussage, daher liegt der Mittelpunkt auf jeder Ebene der Schar.

Gleichung der Geraden

Da der Punkt $M_{CD}(0,5 | 5,6 | 2,6)$ auf jeder Ebene der Schar liegt, liegt der Punkt auch auf der Drehachse.

Da alle Ebenen der Schar parallel zur x_3 -Achse sind, ist der Richtungsvektor der

$$\text{Drehachse } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Geradengleichung: } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 5,6 \\ 2,6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis:

Die Gleichung der Geraden h könnte man alternativ auch so bestimmen:

Man wählt zwei konkrete Ebenen der Schar aus (z.B. mit $a = 0$ und $a = 1$) und berechnet die Schnittgerade dieser beiden Ebenen.

d) Begründung

Ebene $E_1 : 12x_1 + 5x_2 = 34$

Berechnung der Schnittgerade von E_1 mit der x_2x_3 -Ebene $x_1 = 0$

Lösung des LGS:

$$12x_1 + 5x_2 = 34$$

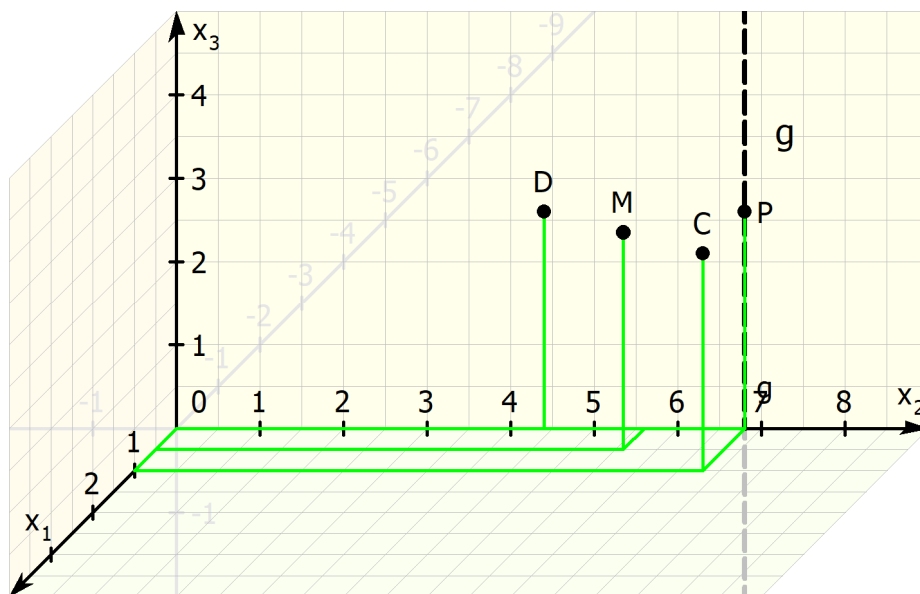
$$x_1 = 0$$

Setze $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$

Aus 2. Zeile: $x_1 = 0$

Aus 1. Zeile: $x_2 = \frac{34}{5} = 6,8$

Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6,8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



In der Zeichnung sind die ursprünglichen Eckpunkte C und D und deren Mittelpunkt $M(0,5|5,6|2,6)$ eingezeichnet sowie die senkrechte Schnittgerade g.

Abstand von M zu C: $|\overrightarrow{MC}| = \left| \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0,5^2 + 1,2^2} = 1,3 \text{ Meter}$

Nach Drehung der Ebene hat der neue rechte obere Eckpunkt der Fläche immer noch die x_3 – Koordinate 2,6.

Der Punkt P auf der Schnittgerade g, der sich auf gleicher Höhe wie M befindet hat die Koordinaten $P(0 \mid 6,8 \mid 2,6)$

$$\text{Abstand von M zu P: } |\overrightarrow{MP}| = \left| \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1,2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-0,5)^2 + 1,2^2} = 1,3$$

Da $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MC}|$ gilt, ist P der neue rechte obere Eckpunkt der Projektionsfläche.

Somit stößt die Projektionsfläche an der Wand an.

Hinweis:

Falls $|\overrightarrow{MP}| > |\overrightarrow{MC}|$ gelten würde, würde die Projektionsfläche nicht anstoßen.