

Hauptprüfung Abiturprüfung 2020

Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie B1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

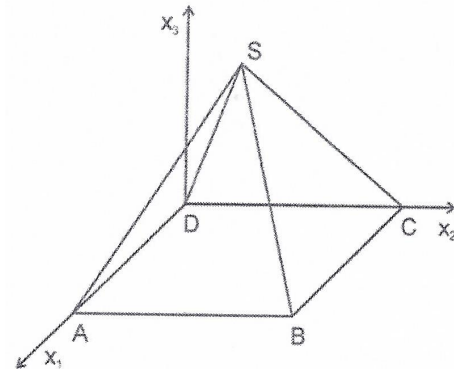
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2020

Aufgabe B1:

Ein Ausstellungsraum hat die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte des Bodens können in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch die Punkte $A(18|0|0)$, $B(18|18|0)$, $C(0|18|0)$ und $D(0|0|0)$ dargestellt werden (siehe Abbildung). Die Spitze des Raumes wird durch den Punkt $S(9|9|12)$ beschrieben, die rechte Seitenwand durch das gleichschenklige Dreieck BCS (alle Koordinatenangaben in Meter).



- a) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen den beiden Kanten, die durch die Strecken BC und BS beschrieben werden.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E , in der das Dreieck BCS liegt.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt der rechten Seitenwand.
(Teilergebnis: $E: 4x_2 + 3x_3 = 72$)

(5 Punkte)

Eine punktförmige Lampe befindet sich am unteren Ende einer fünf Meter langen Stange, die von der Raumspitze ausgeht und senkrecht nach unten hängt.

- b) Die Stange mit der Lampe kann in eine Pendelbewegung versetzt werden.
Diese Pendelbewegung verläuft im Modell in einer Ebene parallel zur x_2x_3 -Ebene.
Wenn die Lampe zu stark schwingt, dann trifft sie die rechte Seitenwand.
Der Auftreffpunkt wird im Modell durch den Punkt P beschrieben.
Berechnen Sie die Koordinaten von P .

(2 Punkte)

- c) Im Rahmen einer Kunstaussstellung wurde ein drei Meter langer Stab senkrecht zum Boden angebracht, der im Modell durch die Strecke FG mit $F(11|15|0)$ beschrieben wird. Befindet sich die Lampe in der Position, die durch $L(9|9|7)$ beschrieben wird, so wirft der Stab einen Schatten, dessen Endpunkt auf der rechten Seitenwand durch G^* beschrieben wird.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes G^* .
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Gesamtlänge des betrachteten Schattens berechnen kann.

(3 Punkte)

Lösungen

Aufgabe B1:

a) Größe des Winkels

Gesucht ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} \right|} = \frac{162}{18 \cdot \sqrt{306}} \Rightarrow \alpha \approx 59,0^\circ$$

Koordinatengleichung

Parameterform der Ebene E durch die Punkte B, C und S:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von E: } \vec{n} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 216 \\ 162 \end{pmatrix} \text{ bzw. gekürzt } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatengleichung: $4x_2 + 3x_3 = d$

Einsetzen des Punktes B(18|18|0) ergibt $d = 72$.

Koordinatengleichung von E: $4x_2 + 3x_3 = 72$

Flächeninhalt der Seitenwand

Gesucht ist der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks BCS.

Mittelpunkt der Strecke BC: $M_{BC}(\frac{18+0}{2} | \frac{18+18}{2} | \frac{0+0}{2})$, also $M_{BC}(9 | 18 | 0)$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{SM_{BC}}|$$

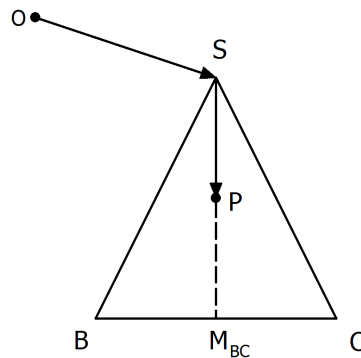
$$|\overrightarrow{BC}| = 18$$

$$|\overrightarrow{SM_{BC}}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0 + 81 + 144} = 15$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 18 = 135 \text{ m}^2$$

Der Flächeninhalt der Seitenwand beträgt 135 m².

b) Koordinaten von P



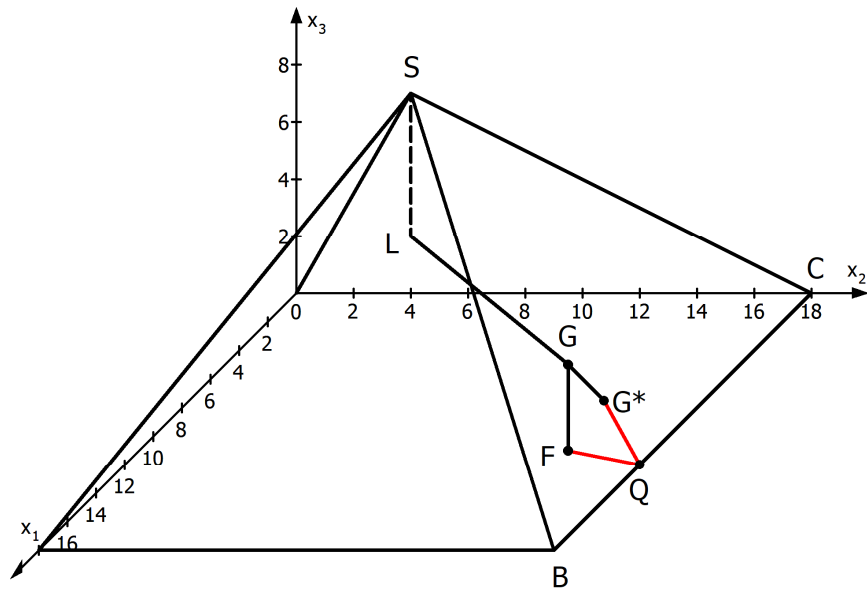
Der Punkt P liegt auf der Strecke SM_{BC} und hat vom Punkt S den Abstand 5 Meter.

der Einheitsvektor des Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{SM_{BC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$ benötigt: $\vec{u}_0 = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + 5 \cdot \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + 5 \cdot \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Der Punkt P hat die Koordinaten P(9|12|8).

c) Koordinaten von G^*



Der Lichtstrahl liegt auf der Geraden g durch die Punkte $L(9|9|7)$ und $G(11|15|3)$:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

G^* ist der Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene E :

$$\begin{aligned} 4 \cdot (9 + 6r) + 3(7 - 4r) &= 72 \\ \Leftrightarrow 36 + 24r + 21 - 12r &= 72 \\ \Leftrightarrow 12r &= 15 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Einsetzen von r in die Gerade ergibt den Schnittpunkt $G^*(11,5|16,5|2)$.

Verfahren

Der Schatten verläuft gemäß der Skizze entlang der Seitenwand von G^* zum Punkt Q und dann entlang des Bodens von Punkt Q zu Punkt F .

$$\text{Schattenlänge} = |\overline{FQ}| + |\overline{G^*Q}|$$

Berechnung des Punktes Q :

Q ist der Schnittpunkt der Geraden durch B und C und der Ebene, die die Punkte L , F und G enthält.