

Hauptprüfung Abiturprüfung 2020

Baden-Württemberg

Wahlteil Analysis A2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

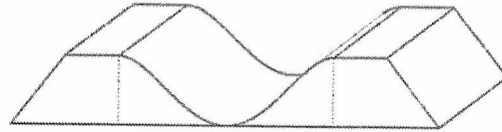
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2020

Aufgabe A 2.1

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Station in einem Bikepark, die aus zwei seitlichen Wällen und einer Fahrrinne besteht.



Die Abbildung in der Anlage zeigt modellhaft ihren Querschnitt. Dabei wird die Fahrrinne durch den Graphen einer Funktion f im Bereich $-8 \leq x \leq 8$ modelliert (Angaben in Meter). Die Querschnitte der Wälle sind grau markiert. Der horizontale Untergrund wird im Querschnitt durch die x -Achse beschrieben. Die Station hat auf ihrer gesamten Länge den in der Abbildung gezeigten Querschnitt.

- a) Bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenstellungen anhand des Graphen in der Anlage. Bestimmen Sie die Breite der Fahrrinne in einer Höhe von 1m über dem Untergrund. Ermitteln Sie die mittlere Steigung zwischen den im Modell mit B und C bezeichneten Punkten. Bestimmen Sie die maximale Steigung der Fahrrinne. Begründen Sie, dass f keine ganzrationale Funktion zweiten Grades sein kann. (4,5 Punkte)

b) Es ist $f(x) = -\frac{1}{1024}x^4 + \frac{1}{8}x^2$.

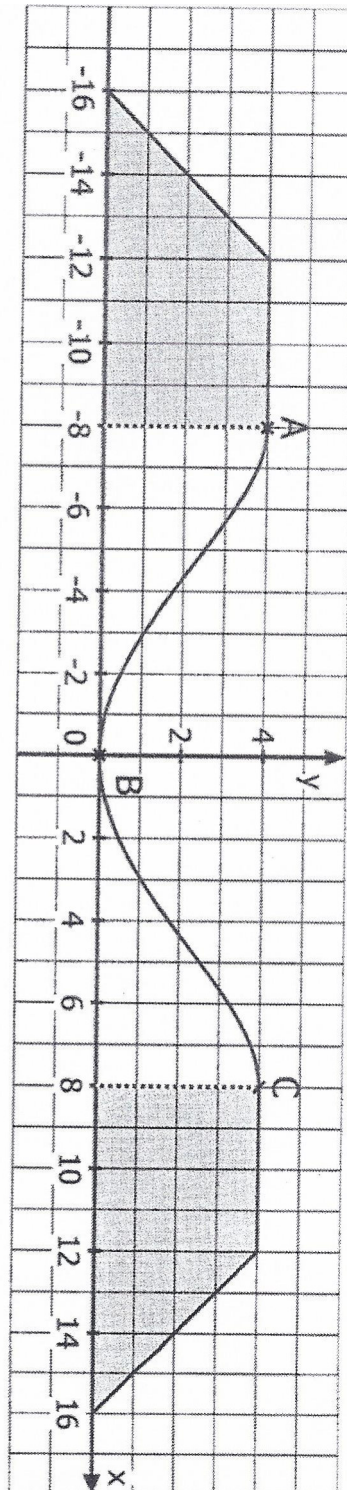
Berechnen Sie die Höhe, in der die Fahrrinne eine Breite von 12m hat. Das verbaute Material hat ein Gesamtvolumen von 1168 m^3 . Ermitteln Sie die Länge der Station.

(5 Punkte)

- c) Die abgebildete Fahrrinne lässt sich auch näherungsweise durch den Graphen einer trigonometrischen Funktion g modellieren, der die Punkte A, B und C als Extrempunkte besitzt. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm von g .

(2,5 Punkte)

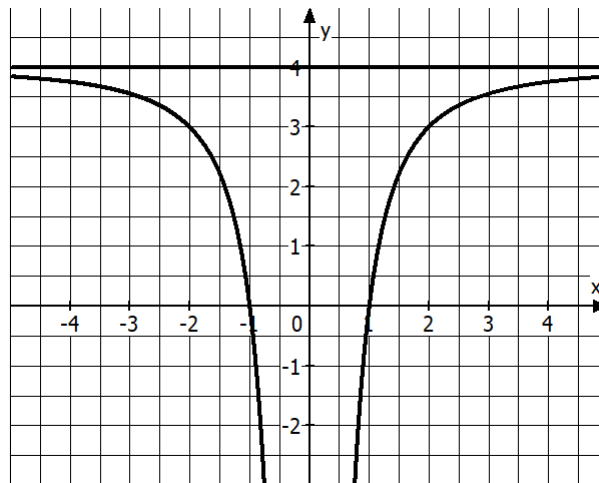
Abbildung zu Aufgabe 2.1:



Aufgabe A 2.2

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$; $x \neq 0$.

Ihr Graph K sowie die Gerade $g: y = 4$ sind in der folgenden Abbildung dargestellt.



- a) Der Punkt $P(u|v)$ mit $u > 0$ ist ein Punkt auf K .
 Die Punkte P , $Q(u|4)$, $R(0|4)$ und $S(0|v)$ sind die Ecken eines Rechtecks.
 Bei Rotation dieses Rechtecks um die y -Achse entsteht ein Zylinder.
 Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Zylinders unabhängig von u ist.
 Berechnen Sie denjenigen Wert von u , für den der Inhalt der Mantelfläche des Zylinders 4π beträgt.
 (4 Punkte)
- b) Für jeden Punkt auf K begrenzen die zugehörige Tangente an K , die Gerade g und die y -Achse ein Dreieck. Für einen solchen Punkt T mit positiver x -Koordinate ist dieses Dreieck gleichschenkelig.
 Berechnen Sie die x -Koordinate dieses Punktes T .
 (2 Punkte)
- c) C ist der Graph der Funktion h mit $h(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$.
 K geht durch eine Streckung in y -Richtung und eine Streckung in x -Richtung aus C hervor.
 Ermitteln Sie die beiden zugehörigen Streckfaktoren.
 (2 Punkte)

Lösungen

Aufgabe A 2.1

a) Breite der Fahrrinne

Gesucht ist die Stelle x in der Abbildung, bei der $f(x) = 1$ gilt.

Dies ist für $x \approx 3$ und $x \approx -3$ der Fall, das heißt es gilt $f(3) = f(-3) \approx 1$

Die Breite der Fahrrinne in einer Höhe von 1 m beträgt ca. 6 m.

Mittlere Steigung

Koordinaten der Punkte: B(0|0) und C(8|4)

$$m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4 - 0}{8 - 0} = 0,5$$

Maximale Steigung

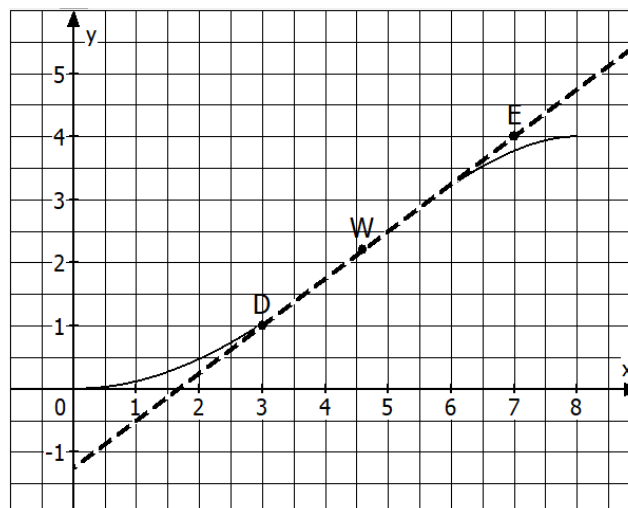
Die maximale Steigung existiert im Wendepunkt des Schaubildes.

Die Wendestelle befindet sich gemäß der Zeichnung bei $x \approx 4,6$

Steigung der Tangente in W:

Die Tangente verläuft näherungsweise durch die Punkte D(3|1) und E(7|4).

$$m = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{4 - 1}{7 - 3} = 0,75$$



Begründung

Der Graph einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades besitzt keine Wendepunkte.
Der abgebildete Graph besitzt jedoch zwei Wendepunkte.

b) Höhe

Aufgrund der gegebenen Breite von 12m ergibt sich der x-Wert $x = \frac{12}{2} = 6$.

Es gilt $f(6) \approx 3,23$ m.

Länge der Station

Volumen des Materials = Grundfläche · Länge

$$\begin{aligned} \text{Grundfläche} &= 2 \cdot A_{\text{Trapez}} + 2 \cdot \int_0^8 f(x) dx = 2 \cdot \frac{8+4}{2} \cdot 4 + 2 \cdot \left[-\frac{1}{5120} x^5 + \frac{1}{24} x^3 \right]_0^8 \\ &= 48 + 2 \cdot \left(-6,4 + \frac{64}{3} - 0 \right) = \frac{1168}{15} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1168 = \frac{1168}{15} \cdot \text{Länge}$$

$$\Rightarrow \text{Länge} = 15 \text{ Meter}$$

Die Station ist 15 Meter lang.

c) Funktionsterm

Die Funktion besitzt auf der y-Achse einen Tiefpunkt.

Somit kann die Funktion als eine an der x-Achse gespiegelte Kosinusfunktion interpretiert werden. Eine Verschiebung nach links/rechts ist dann nicht mehr erforderlich.

$$\text{Ansatz: } g(x) = -a \cdot \cos(bx) + d$$

$$\text{Es gilt } d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2 \quad \text{und} \quad a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{4 - 0}{2} = 2$$

Periode des Schaubildes = 16

$$b = \frac{2\pi}{\text{Periode}} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$$

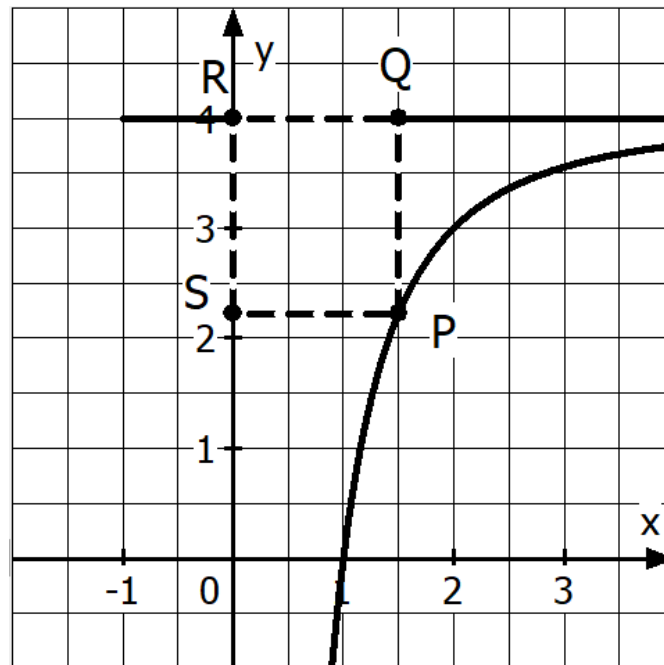
$$\text{Funktionsterm: } g(x) = -2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} x\right) + 2$$

Andere mögliche Funktionsterme wären beispielsweise:

$$g(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} (x - 8)\right) + 2 \quad \text{oder} \quad g(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} (x - 4)\right) + 2$$

Aufgabe A 2.2

a) Zylindervolumen



Die Koordinaten der Punkte dürfen nur von der Variable u abhängig sein.

$P(u \mid f(u))$ (da der Punkt auf dem Schaubild K liegt)

$Q(u \mid 4)$ (Punkt liegt auf der Gerade $y = 4$)

$R(0 \mid 4)$ (fester Punkt)

$S(0 \mid f(u))$ (gleicher y -Wert wie Punkt P)

Radius des Zylinders: $r = \overline{PS} = u - 0 = u$

Höhe des Zylinders: $h = \overline{PQ} = 4 - f(u)$

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot u^2 \cdot \left(4 - \left(4 - \frac{4}{u^2} \right) \right) = \pi \cdot u^2 \cdot \frac{4}{u^2} = 4\pi$$

Damit ist das Volumen unabhängig von u .

Mantelfläche

$$M = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot u \cdot \left(4 - \left(4 - \frac{4}{u^2} \right) \right) = 2\pi \cdot u \cdot \frac{4}{u^2} = \frac{8\pi}{u}$$

Bedingung: $M = 4\pi$

$$\frac{8\pi}{u} = 4\pi \quad \Leftrightarrow u = 2$$

b) Gleichschenkliges Dreieck

Der Punkt T mit positivem x-Wert hat eine positive Tangentensteigung.

Damit das Dreieck gleichschenkelig ist, muss die Steigung der Tangente 1 sein.

Bedingung: $f'(x) = 1$

$$f(x) = 4 - 4x^{-2}$$

$$f'(x) = 8x^{-3} = \frac{8}{x^3}$$

$$\frac{8}{x^3} = 1 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Die x-Koordinate von T ist $x = 2$.

c) Streckfaktoren

Streckung des Schaubildes von h in x-Richtung und y-Richtung ergibt:

$f(x) = a \cdot h(bx)$ mit $b > 0$

$$a \cdot h(bx) = a \cdot \left(1 - \frac{9}{(bx)^2}\right) = a - \frac{9a}{(bx)^2}$$

$$\text{Bedingung: } a - \frac{9a}{(bx)^2} = 4 - \frac{4}{x^2}$$

Daraus folgt:

$$1.) \ a = 4$$

$$2.) \ \frac{9a}{b^2x^2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow \frac{36}{b^2x^2} = \frac{4}{x^2}$$

$$\text{Daraus ergibt sich } b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

K geht durch eine Streckung mit dem Faktor 4 in y-Richtung und eine Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ in x-Richtung aus C hervor.