

Hauptprüfung Abiturprüfung 2020

Baden-Württemberg

Wahlteil Analysis A1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

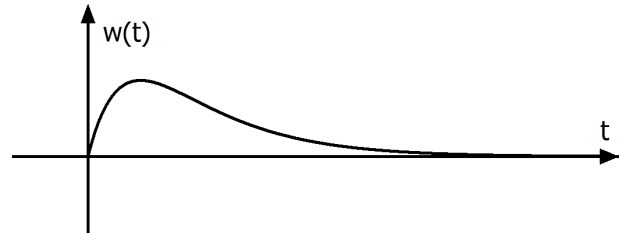
www.mathe-aufgaben.com

August 2020

Aufgabe A 1.1

Betrachtet wird das Wachstum einer Palme. Ihre Höhe beträgt zu Beobachtungsbeginn einen Meter, die momentane Wachstumsrate ihrer Höhe wird durch die Funktion w mit

$$w(t) = 4 \cdot (e^{-t} - e^{-2t}); \quad t \geq 0$$



(t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, $w(t)$ in Meter pro Jahr) beschrieben. Die Abbildung zeigt den Graphen von w .

- a) Geben Sie die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t = 1$ an. Begründen Sie anhand des Graphen, dass die Höhe der Palme im abgebildeten Zeitraum nie abnimmt. Die Funktion w besitzt im abgebildeten Bereich eine Wendestelle. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang. Berechnen Sie den Zeitpunkt der maximalen momentanen Wachstumsrate. (4 Punkte)
- b) Berechnen Sie die Höhenzunahme der Palme im zweiten Jahr nach Beobachtungsbeginn. Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm der Funktion h , der die Höhe der Palme zum Zeitpunkt t angibt. Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, an dem die Palme eine Höhe von 1,50 m hat. Untersuchen Sie, welche Höhe die Palme maximal erreichen kann.

Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung

$$\frac{h(t+0,5)}{h(t)} = 1,5 \text{ führt.}$$

(8 Punkte)

Aufgabe A 1.2

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = -\frac{1}{8}x^4 + a^2x^2$.

- a) Abgebildet sind drei Graphen.
 Begründen Sie, dass zwei dieser Graphen nicht zu einer Funktion f_a gehören.
 Der verbleibende Graph gehört zu einer Funktion f_a .
 Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a .

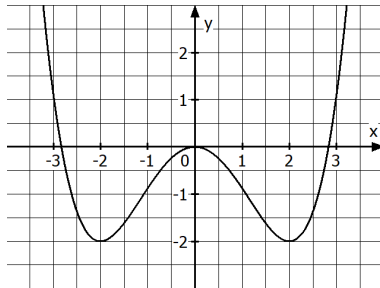


Abb. 1

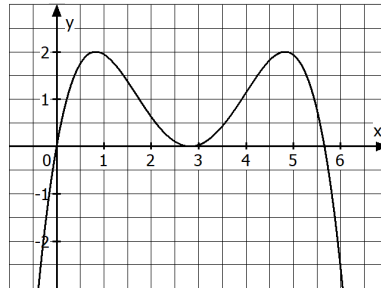


Abb. 2

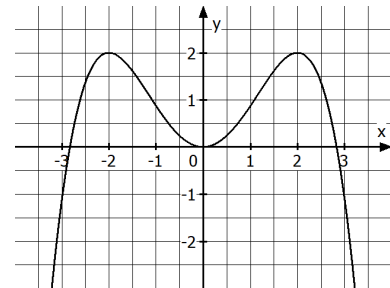


Abb. 3

(3 Punkte)

- b) Jede Funktion f_a besitzt an der Stelle $x_1 = 2a$ ein Maximum.
 Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve, auf der die zugehörige Hochpunkte aller
 Graphen von f_a liegen.

(2 Punkte)

- c) Der Punkt $O(0|0)$ sowie die Punkte $P(4a | -16a^4)$ und $Q(-4a | -16a^4)$ des Graphen von f_a bilden ein Dreieck.

Berechnen Sie denjenigen Wert von a , für den dieses Dreieck gleichseitig ist.

(3 Punkte)

Lösungen

Aufgabe A 1.1

a) momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t = 1$:

Die Funktion w stellt die momentane Wachstumsrate dar.

Es gilt $w(1) = 4 \cdot (e^{-1} - e^{-2}) \approx 0,93$ Meter pro Jahr

Begründung, das Pflanzenhöhe nicht abnimmt:

Das Schaubild der Funktion w stellt die momentane Wachstumsrate dar.

Das Schaubild verläuft oberhalb der t -Achse. Damit kann die Wachstumsrate nie negativ sein, somit nimmt die Höhe nicht ab.

Bedeutung der Wendestelle:

An der Wendestelle eines Schaubildes befindet sich der Punkt mit der maximalen oder minimalen Tangentensteigung.

An der Wendestelle des Schaubildes von w nimmt die Wachstumsrate der Palme am stärksten ab (da die Steigung negativ ist).

Zeitpunkt der maximalen Wachstumsrate

Dies entspricht dem x -Wert des Hochpunktes des Schaubildes von w .

Ableitungen:

$$w'(t) = 4 \cdot (-e^{-t} + 2e^{-2t})$$

$$w''(t) = 4 \cdot (e^{-t} - 4e^{-2t})$$

Hinreichende Bedingung für das lokale Maximum: $w'(t) = 0$ und $w''(t) < 0$

$$4 \cdot (-e^{-t} + 2e^{-2t}) = 0$$

$$\Rightarrow -e^{-t} + 2e^{-2t} = 0$$

$$\Rightarrow e^{-t} \cdot (-1 + 2e^{-t}) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $e^{-t} = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $-1 + 2e^{-t} = 0 \Rightarrow e^{-t} = 0,5 \Rightarrow t = -\ln(0,5) \approx 0,693$

$$w''(0,693) = 4 \cdot (e^{-0,693} - 4e^{-2 \cdot 0,693}) = -2 < 0$$

Die Wachstumsrate ist nach $t = 0,69$ Jahren maximal.

Hinweis:

Auf den Nachweis mit der zweiten Ableitungsfunktion könnte eventuell verzichtet werden, da man aus dem Schaubild von w ablesen kann dass die Funktion einen Hochpunkt besitzt.

b) Höhenzunahme der Palme im zweiten Jahr:

$$\int_1^2 w(t) dt = \int_1^2 4 \cdot (e^{-t} - e^{-2t}) dt = \left[4 \cdot \left(-e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right) \right]_1^2$$

$$= 4 \cdot (-e^{-2} + 0,5e^{-4}) - 4 \cdot (-e^{-1} + 0,5e^{-2}) \approx 0,70$$

Die Höhenzunahme im zweiten Jahr beträgt ca. 0,70 Meter.

Integralfreier Funktionsterm:

Die Funktion w stellt die momentane Wachstumsrate in Metern pro Jahr da. Die Höhe der Palme wird durch eine Stammfunktion h von w beschrieben.

Allgemeine Stammfunktion von w : $h(t) = 4 \cdot \left(-e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right) + C$

Bedingung: $h(0) = 1$, da zu Beginn die Palme 1 Meter hoch ist.

$$h(0) = 4 \cdot (-e^0 + 0,5) + C = 1 \Rightarrow -2 + C = 1 \Rightarrow C = 3$$

Der gesuchte Funktionsterm lautet $h(t) = 4 \cdot \left(-e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right) + 3$.

Hinweis:

Alternativ hätte man den Funktionsterm auch über die folgende Integralfunktion

berechnen können: $h(t) = h(0) + \int_0^t w(x) dx$

Zeitpunkt mit Höhe 1,50m:

Bedingung: $h(t) = 1,5$

$$4 \cdot \left(-e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right) + 3 = 1,5$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \left(-e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right) = -1,5 \Rightarrow -e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} = -\frac{3}{8} \Rightarrow -2e^{-t} + e^{-2t} + 0,75 = 0$$

Lösung mit Substitution: $u = e^{-t}$

$$u^2 - 2u + 0,75 = 0$$

abc-Formel: $u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3}}{2} = \frac{2 \pm 1}{2}$ und damit $u_1 = 1,5$ und $u_2 = 0,5$

Rücksubstitution: $e^{-t} = 1,5 \Rightarrow t = -\ln(1,5) \approx -0,41$

$$e^{-t} = 0,5 \Rightarrow t = -\ln(0,5) \approx 0,69$$

Da die Variable t nicht negativ werden kann, kommt nur $t = 0,69$ in Frage.

Nach ca. 0,7 Jahren hat die Palme eine Höhe von 1,50 Meter.

Höhe, die die Pflanze maximal erreichen kann:

Da die Höhenzuwachsrate $w(t) > 0$ ist, nimmt die Höhe der Pflanze ständig zu.
Die maximal erreichbare Höhe wird für $t \rightarrow +\infty$ erreicht.

Für $t \rightarrow +\infty$ strebt $h(t) \rightarrow 3$, da $e^{-t} \rightarrow 0$ und $e^{-2t} \rightarrow 0$.
Die Pflanze kann maximal 3 Meter hoch werden.

Fragestellung:

$h(t)$ gibt die Höhe der Pflanze in Meter zum Zeitpunkt t an.
 $h(t+0,5)$ gibt die Höhe der Pflanze in Meter zum Zeitpunkt $t + 0,5$ an (also die Höhe ein halbes Jahr nach dem Zeitpunkt t)

Fragestellung: In welchem Halbjahreszeitraum nimmt die Höhe der Pflanze um 50% zu?

Aufgabe A 1.2

a) Begründung:

Die Funktionsgleichung $f_a(x) = -\frac{1}{8}x^4 + a^2x^2$ enthält nur gerade Hochzahlen bei x .

Das heißt, dass das Schaubild der Funktion symmetrisch zur y -Achse ist.
Damit kommt Abbildung 2 nicht in Betracht.

Vor dem höchsten Grad steht der negative Faktor $-\frac{1}{8}$.

Das heißt: Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f_a(x) \rightarrow -\infty$.

Damit kommt Abbildung 1 nicht in Betracht.

Andere mögliche Begründung, dass Abbildung 1 nicht in Betracht kommt:

Es gilt $f'_a(x) = -0,5x^3 + 2a^2x$ und $f''_a(x) = -1,5x^2 + 2a^2$.

An der Stelle $x = 0$ gilt: $f''_a(0) = 2a^2 > 0$

Das heißt, dass das Schaubild von f bei $x = 0$ linksgekrümmt ist.

Das Schaubild in Abbildung 1 ist bei $x = 0$ jedoch rechtsgekrümmt und scheidet daher aus.

Wert von a:

Zur Berechnung von a liest man einen Punkt des Schaubildes ab, z.B. $A(2|2)$.

Bedingung: $f_a(2) = 2$

$$-\frac{1}{8} \cdot 2^4 + a^2 \cdot 2^2 = 2 \quad \Leftrightarrow 4a^2 = 4 \quad \Leftrightarrow a^2 = 1 \quad \Leftrightarrow a = \pm 1$$

Da $a > 0$ vorgegeben ist gilt $a = 1$.

b) Ortskurve:

Zur Berechnung der Ortskurve benötigt man den y -Wert des Hochpunktes:

$$f_a(2a) = -\frac{1}{8} \cdot (2a)^4 + a^2 \cdot (2a)^2 = -2a^4 + 4a^4 = 2a^4$$

Hochpunkt der Funktion: $H(2a | 2a^4)$

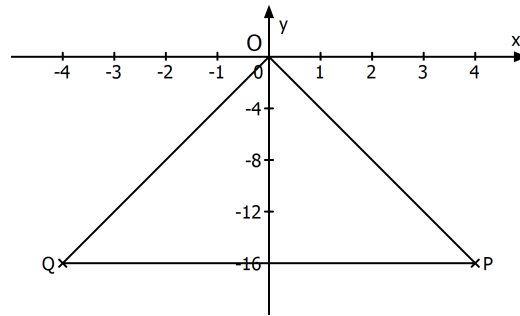
Es gilt $x = 2a$ (1) und $y = 2a^4$ (2)

Auflösen von Gleichung (1) nach a : $a = \frac{1}{2}x$ (3)

$$(3) \text{ in } (2) \text{ eingesetzt: } y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^4 = \frac{1}{8}x^4$$

Die gesuchte Gleichung der Kurve lautet $y = \frac{1}{8}x^4$.

c)



Das Dreieck OPQ ist für $a = 1$ beispielhaft eingezeichnet.

Das Dreieck ist unabhängig von a immer gleichschenkelig, das heißt es gilt $\overline{OQ} = \overline{OP}$.

Damit das Dreieck gleichseitig ist, muss gelten: $\overline{OP} = \overline{PQ}$

Für die Länge einer Strecke $\overline{AB}$ gilt: $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

$$\overline{OP} = \sqrt{(4a - 0)^2 + (-16a^4 - 0)^2} = \sqrt{16a^2 + 256a^8}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(4a - (-4a))^2 + (-16a^4 - (-16a^4))^2} = \sqrt{(8a)^2 + 0^2} = \sqrt{64a^2}$$

Bedingung:

$$\sqrt{16a^2 + 256a^8} = \sqrt{64a^2} \quad | \text{quadrieren}$$

$$\Rightarrow 16a^2 + 256a^8 = 64a^2$$

$$\Leftrightarrow 256a^8 - 48a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 \cdot (256a^6 - 48) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ kommt als Lösung nicht in Frage wegen $a > 0$

$$\text{Gleichung II): } 256a^6 - 48 = 0 \Rightarrow a^6 = \frac{3}{16} \Rightarrow a = \pm \sqrt[6]{\frac{3}{16}}$$

Wegen $a > 0$ ist das Dreieck für $a = \sqrt[6]{\frac{3}{16}} \approx 0,76$ gleichseitig.