

Hauptprüfung Abiturprüfung 2020

Baden-Württemberg

Pflichtteil

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2020

Aufgabe 1: (2 VP)

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{-5x}$.

Aufgabe 2: (1,5 VP)

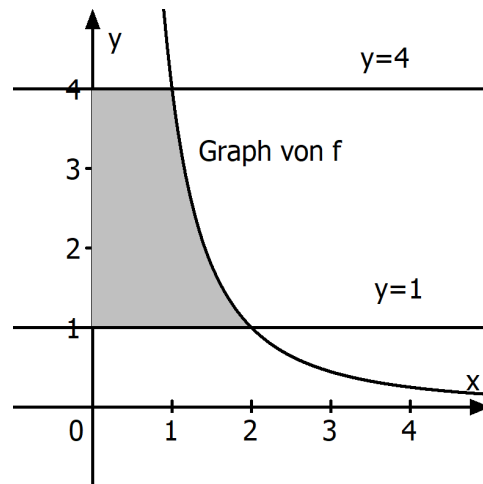
Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4x-7}$, für die $F(2) = 1$ ist.

Aufgabe 3: (1,5 VP)

Lösen Sie die Gleichung $(x^2 + 8) \cdot (e^{x-1} - 1) = 0$.

Aufgabe 4: (2,5 VP)

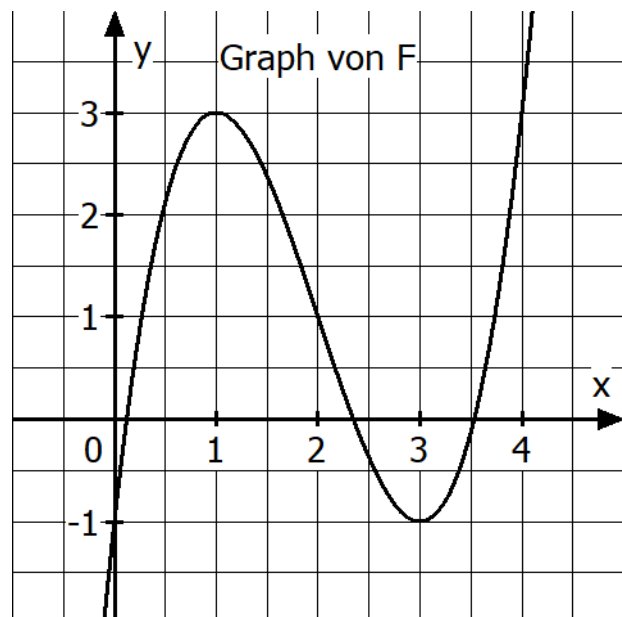
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2}$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ im Punkt $P(1|4)$ und die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ im Punkt $Q(2|1)$. Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



Aufgabe 5: (2,5 VP)

Abgebildet ist der Graph einer Funktion F . F ist Stammfunktion einer ganzrationalen Funktion f .

- Geben Sie eine Nullstelle von f im abgebildeten Bereich an.
- Bestimmen Sie $\int_1^2 f(x) dx$.
- Begründen Sie, dass die Funktion f im Bereich $0,5 \leq x \leq 1,5$ streng monoton fallend ist.



Aufgabe 6: (5 VP)

Gegeben sind die Ebenen $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ und $F: 2x_2 + x_3 = 4$.

- Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.
- Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.
- Berechnen Sie den Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ von der Ebene E .

Aufgabe 7: (2,5 VP)

Eine Gerade ist orthogonal zur Ebene $E: x_1 - x_3 = 5$ und schneidet die x_1 -Achse in einem Punkt, der vom Punkt $P(0|2|1)$ den Abstand 3.

Bestimmen Sie eine Gleichung einer solchen Geraden.

Aufgabe 8: (2,5 VP)

Auf einem Tisch liegen verdeckt vier rote und zwei schwarze Karten, mit denen Anna und Bernd das folgende Spiel spielen: Anna deckt in der ersten Runde nacheinander zwei Karten auf und legt sie nebeneinander auf den Tisch. Ist darunter mindestens eine schwarze Karte, dann gewinnt Anna und das Spiel ist beendet. Andernfalls deckt Bernd nacheinander zwei der übrigen Karten auf. Deckt er dabei mindestens eine schwarze Karte auf, so gewinnt er, ansonsten gewinnt Anna.

Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: Anna gewinnt das Spiel in der ersten Runde.

B: Anna gewinnt das Spiel.

Lösungen

Aufgabe 1:

Für die Ableitungsfunktion wird die Kettenregel und Produktregel benötigt:

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-5x}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-5x} + x^2 \cdot e^{-5x} \cdot (-5) = 2x \cdot e^{-5x} - 5x^2 \cdot e^{-5x}$$

Aufgabe 2:

$$\text{Stammfunktion von } f(x) = \sqrt{4x-7} = (4x-7)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot (4x-7)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4} + C = \frac{1}{6} \cdot (4x-7)^{\frac{3}{2}} + C$$

Berechnung von C, so dass gilt: $F(2) = 1$

$$F(2) = \frac{1}{6} \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} + C \quad (\text{Hinweis: } 1^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1^3} = 1)$$

$$\text{Bedingung: } \frac{1}{6} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{5}{6}$$

$$\text{Die gesuchte Stammfunktion lautet } F(x) = \frac{1}{6} \cdot (4x-7)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{6}$$

Aufgabe 3:

$$(x^2 + 8) \cdot (e^{x-1} - 1) = 0 \quad \text{Lösung der Gleichung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 = -8$ Gleichung ist nicht lösbar

$$\text{Gleichung II): } e^{x-1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x-1} = 1 \Rightarrow x-1 = \ln(1) \Rightarrow x = \ln(1) + 1 = 1$$

Die Gleichung besitzt eine Lösung $x = 1$.

Aufgabe 4:

Zur Berechnung des Flächeninhalts wird die Fläche aufgeteilt:

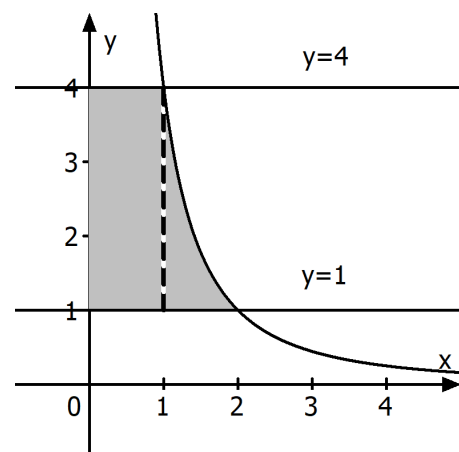
Linke Fläche:

$$A_1 = A_{\text{Rechteck}} = 1 \cdot 3 = 3$$

Rechte Fläche:

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_1^2 (f(x) - 1) dx = \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - 1 \right) dx = \int_1^2 (4x^{-2} - 1) dx \\ &= \left[-\frac{4}{x} - x \right]_1^2 = (-2 - 2) - (-4 - 1) = -4 + 5 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Gesamtfläche: } A = A_1 + A_2 = 3 + 1 = 4$$



Aufgabe 5:

- a) Die Funktion f besitzt eine Nullstelle, wenn das Schaubild von F eine waagrechte Tangente besitzt.

Dies gilt für die Stellen $x = 1$ und $x = 3$.

Hinweis: Es genügt, wenn nur eine der beiden x -Werte angegeben wird.

b) $\int_1^2 f(x) dx = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = 1 - 3 = -2.$

- c) Die Funktion f ist streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$ ist für $0,5 \leq x \leq 1,5$.

Wegen $F''(x) = f'(x)$ ist zu begründen, dass $F''(x) < 0$ ist für $0,5 \leq x \leq 1,5$.

Dies ist dann der Fall, wenn das Schaubild von F rechtgekrümmt ist.

Dies ist in dem Intervall $0,5 \leq x \leq 1,5$ der Fall.

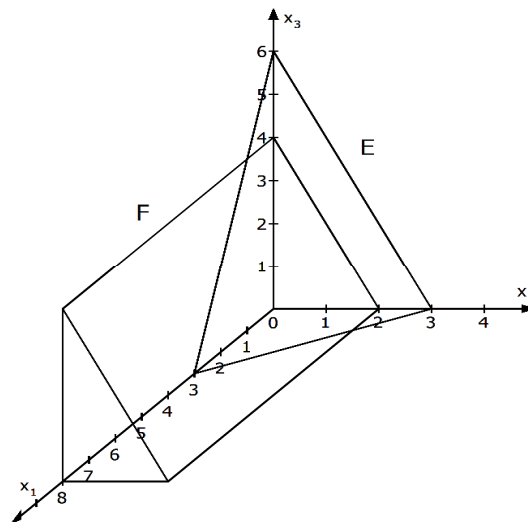
Aufgabe 6:

- a) Berechnung der Spurpunkte der Ebenen (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen):

Spurpunkte der Ebene E: $S_1(3|0|0)$ $S_2(0|3|0)$ $S_3(0|0|6)$

Spurpunkte der Ebene F: $S_2(0|2|0)$ $S_3(0|0|4)$

Die Ebene F ist parallel zur x_1 -Achse.



- b) Gleichung der Schnittgeraden:

Zu lösen ist folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 6 \\ 2x_2 + x_3 & = & 4 \end{array}$$

Setze $x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$

Aus der 2. Zeile folgt: $x_3 = 4 - 2t$

Aus der 1. Zeile folgt: $2x_1 + 2t + 4 - 2t = 6 \Rightarrow x_1 = 1$

$$\text{Gleichung der Schnittgeraden: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 4-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ von E:

$$\text{Hessesche Normalenform von E: } \frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6}{3} = 0$$

$$\text{Einsetzen des Punktes } O(0|0|0): d = \left| \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 - 6}{3} \right| = 2$$

Aufgabe 7:

$$\text{Die Ebene E besitzt den Normalenvektor } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Da die Gerade g orthogonal zur Ebene verläuft, besitzt sie den Richtungsvektor } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(oder ein Vielfaches davon).

Gesucht ist ein Punkt $A(c|0|0)$ auf der x_1 -Achse, der vom Punkt $P(0|2|1)$ den Abstand 3 hat.

$$\text{Bedingung: } |\overline{PA}| = 3$$

$$|\overline{PA}| = \left| \begin{pmatrix} c-0 \\ 0-2 \\ 0-1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{c^2 + 4 + 1} = \sqrt{c^2 + 5}$$

$$\sqrt{c^2 + 5} = 3 \quad | \text{quadrieren}$$

$$c^2 + 5 = 9 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = \pm 2$$

Mögliche Punkte auf der x_1 -Achse sind $A(2|0|0)$ oder $A^*(-2|0|0)$.

$$\text{Mögliche Geradengleichung: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8:

$P(A) = P(\text{mindestens eine schwarze Karte unter den ersten 2 Karten})$

$$= 1 - P(2 \text{ rote Karten}) = 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$P(B) = P(\text{Anna gewinnt das Spiel}) = P(\text{Gewinn in 1. Runde}) + P(\text{Gewinn in der 3. Runde})$

$$P(\text{Gewinn in 1. Runde}) = P(A) = \frac{3}{5}$$

$P(\text{Gewinn in 3. Runde}) = P(\text{Anna zieht zwei rote Karten und Bernd zieht zwei rote Karten})$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

$$P(B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$