

Abituraufgaben bis 2020 Baden-Württemberg

Beschreiben und Begründen

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Februar 2021

Aufgabe 1: (Abiturprüfung 2017)

Gegeben sind eine Ebene E , ein Punkt P in E sowie ein weiterer Punkt S , der nicht in E liegt. Der Punkt S ist die Spitze eines geraden Kegels, dessen Grundkreis in E liegt und durch P verläuft. Die Strecke PQ bildet einen Durchmesser des Grundkreises.

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten des Punktes Q bestimmen kann.

Aufgabe 2: (Abiturprüfung 2016)

Von zwei Kugeln K_1 und K_2 sind die Mittelpunkte M_1 und M_2 sowie die Radien r_1 und r_2 bekannt. Die Kugeln berühren einander von außen im Punkt B .

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man B bestimmen kann.

Aufgabe 3: (Abiturprüfung 2014)

Gegeben sind der Mittelpunkt einer Kugel sowie eine Ebene.

Die Kugel berührt diese Ebene.

Beschreiben Sie, wie man den Kugelradius und den Berührungspunkt bestimmen kann.

Aufgabe 4: (Abiturprüfung 2012)

Gegeben sind eine Ebene E und eine Gerade g , die in E liegt.

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung einer Geraden h ermitteln kann, die orthogonal zu g ist und ebenfalls in E liegt.

Aufgabe 5: (Abiturprüfung 2011)

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A , der nicht auf g liegt.

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man denjenigen Punkt B auf g bestimmt, der den kleinsten Abstand von A hat.

Aufgabe 6: (Abiturprüfung 2010)

Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich im Punkt S .

Die Gerade g' ist das Bild von g bei Spiegelung an der Ebene E .

Beschreiben Sie ein Verfahren, um eine Gleichung der Geraden g' zu ermitteln.

Aufgabe 7: (Abiturprüfung 2009)

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A im Raum. A liegt nicht auf g .

A wird an der Geraden g gespiegelt.

Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Bildpunkt A' zu bestimmen.

Aufgabe 8: (Abiturprüfung 2008)

Gegeben sind die beiden Ebenen $E_1 : (\vec{x} - \vec{p}_1) \cdot \vec{n}_1 = 0$ und $E_2 : (\vec{x} - \vec{p}_2) \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man anhand dieser Normalengleichungen die gegenseitige Lage der beiden Ebenen untersuchen kann.

Aufgabe 9: (Abiturprüfung 2007)

Von einem senkrechten Kreiskegel kennt man die Koordinaten der Spitze S, die Koordinaten eines Punktes P des Grundkreises sowie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der der Grundkreis liegt.

Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Mittelpunkt M und den Radius r des Grundkreises zu bestimmen.

Aufgabe 10: (Abiturprüfung 2006)

Gegeben sind zwei Punkte A und B. Diese liegen bezüglich einer Ebene E symmetrisch. Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung einer Gleichung von E.

Aufgabe 11: (Abiturprüfung 2005)

Gegeben sind eine Ebene E und ein Punkt P, der nicht in E liegt.

P wird an E gespiegelt.

Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Bildpunkt P' zu bestimmen.

Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

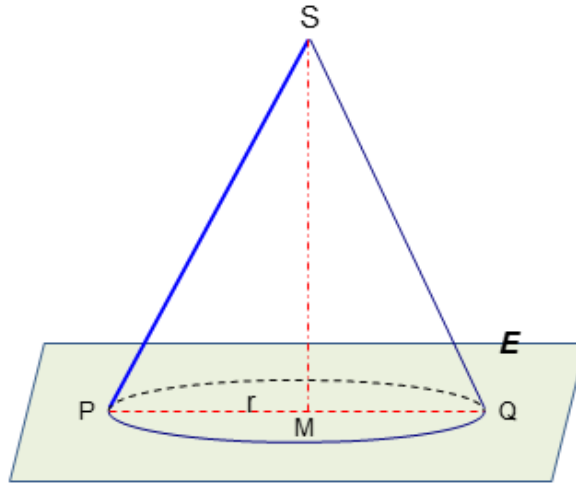
Aufgabe 12: (Abiturprüfung 2004)

Gegeben sind im Raum eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf g liegt. Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung des Abstandes von A zu g.

Lösungen

Aufgabe 1:

Skizze:



1. Schritt:

Bestimme den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E.

2. Schritt:

Stelle eine Hilfsgerade g auf, die durch den Punkt S verläuft und als Richtungsvektor den Normalenvektor der Ebene besitzt. g: $\vec{x} = \vec{OS} + r \cdot \vec{n}$

3. Schritt:

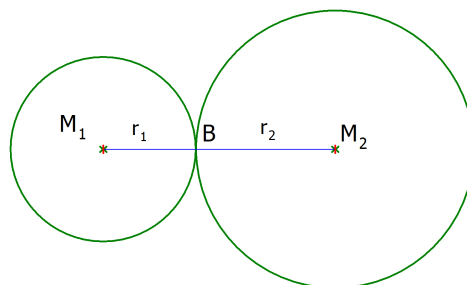
Bestimme den Schnittpunkt M der Hilfsgerade g mit der Ebene E.

4. Schritt:

Berechnung des Punktes Q mit der Vektorgleichung $\vec{OQ} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PM}$

Aufgabe 2:

Skizze:



Um die Koordinaten von B zu bestimmen, benötigt man den Ortsvektor $\vec{OB}$.

Da der Punkt B r_1 Einheiten von M_1 entfernt ist, muss mit einem Einheitsvektor gearbeitet werden.

Es sei $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ und $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ der zugehörige Einheitsvektor.

Den Ortsvektor von Punkt B erhält man nun so: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM_1} + r_1 \cdot \vec{a}_0$

Aufgabe 3:

1. Schritt:

Man stellt die Gleichung einer Hilfsgeraden g auf. Diese Gerade g steht senkrecht auf der gegebenen Ebene (Richtungsvektor von g ist der Normalenvektor von E) und geht durch den Mittelpunkt M der Kugel (Ortsvektor der Gerade ist $\overrightarrow{OM}$)

2. Schritt:

Der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E ist der gesuchte Berührungspunkt B.

3. Schritt:

Den Abstand der Punkte M und B erhält man durch Berechnung von $|\overrightarrow{MB}|$ und entspricht dem Radius der Kugel.

Aufgabe 4:

Da in der Aufgabenstellung nicht vorgegeben ist, in welchem Gleichungstyp die Ebene vorgegeben ist, wird diese nun als Normalenform vorausgesetzt: $[\vec{x} - \vec{p}] \cdot \vec{n} = 0$.

Die Gerade g habe die Parameterform $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$

Gesucht ist nun die Gleichung der Geraden h in der Parameterform $\vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$

1. Schritt: Da die Gerade h in der Ebene E liegt und g orthogonal schneiden soll, kann der Ortsvektor von g auch für h übernommen werden. Es gilt also $\vec{q} = \vec{p}$

2. Schritt: Der Richtungsvektor von h ist orthogonal zum Richtungsvektor von g.

Somit muss gelten $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ (1)

Da die Gerade h in der Ebene E liegt, ist der Richtungsvektor von h auch orthogonal zum Normalenvektor von E.

Somit muss gelten: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ (2)

Aus (1) und (2) ergibt sich ein Gleichungssystem (2 Gleichungen, 3 Unbekannte) mit unendlich vielen Lösungen für $\vec{v}$. Eine beliebige Lösung mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist ein möglicher Richtungsvektor von h.

(Alternativ könnte man auch das Vektorprodukt nutzen: $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{n}$)

Aufgabe 5:

1. Schritt: Stelle eine Hilfsebene auf, die orthogonal zur Gerade verläuft und den Punkt A Enthält (Richtungsvektor von g ist Normalenvektor der Ebene)
2. Schritt: Schneide die Hilfsebene mit der Gerade. Der Schnittpunkt ist der Punkt B.

Aufgabe 6:

1. Schritt: Berechnung des Schnittpunktes S der Gerade g mit der Ebene E
2. Schritt: Bestimmung eines weiteren von S verschiedenen beliebigen Punktes P auf der Geraden.

Dieser Punkt P wird nun an der Ebene E gespiegelt mit folgenden weiteren Schritten:

3. Schritt: Aufstellen einer Hilfsgerade h, die orthogonal zur Ebene E und durch P verläuft (Richtungsvektor von h ist ein Normalenvektor von E)
4. Schritt: Bestimmung des Schnittpunktes F von h mit E
5. Schritt: Berechnung des Spiegelpunktes P* mit $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$
6. Schritt: Aufstellen der Parameterform der Gerade g' durch die Punkte S und P*
 $g': \vec{x} = \overrightarrow{OS} + r \cdot \overrightarrow{SP^*}$

Aufgabe 7:

1. Schritt: Aufstellen einer Hilfsebene H, die den Punkt A enthält und die orthogonal zur Geraden g verläuft (das heißt der Normalenvektor von H ist der Richtungsvektor von g)
2. Schritt: Bestimmung des Schnittpunktes L der Hilfsebene H und der Geraden g
3. Schritt: Berechnung des Punktes A' mit dem Vektorzug $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AL}$

Die Koordinaten des Ortsvektors $\overrightarrow{OA'}$ entsprechen den Koordinaten des Punktes A'.

Aufgabe 8:

- Gilt $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, dann stehen die beiden Ebenen orthogonal aufeinander und schneiden sich in einer Schnittgerade
- Sind die beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ Vielfache und liegt der Punkt, dessen Koordinaten dem Ortsvektor $\vec{p}_1$ entsprechen auf der Ebene E_2 , dann sind die Ebenen identisch (sie liegen aufeinander).
- Sind die beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ Vielfache und liegt der Punkt, dessen Koordinaten dem Ortsvektor $\vec{p}_1$ entsprechen nicht auf der Ebene E_2 , dann sind die Ebenen echt parallel
- In allen anderen Fällen schneiden sich die Ebenen (nicht orthogonal) in einer Schnittgerade.

Aufgabe 9:

- 1.) Aufstellen einer Hilfsgerade h, die durch den Punkt S geht und die orthogonal zur Ebene E verläuft, d.h. der Richtungsvektor von h ist der Normalenvektor von E.
- 2.) Bestimmung des Schnittpunktes der Gerade h und der Ebene E ergibt den Mittelpunkt M des Grundkreises.
- 3.) Der Abstand von M zu P, der mit $|\vec{MP}|$ berechnet wird, ergibt den Radius des Grundkreises.

Aufgabe 10:

Der Vektor $\vec{AB}$ steht senkrecht auf dieser Ebene E, also ist dies der Normalenvektor.

Außerdem liegt der Mittelpunkt M von A und B ebenfalls auf E.

Die Ebenengleichung kann in Normalenform geschrieben werden:

E: $[\vec{x} - \vec{m}] \cdot \vec{AB} = 0$, wobei $\vec{m}$ der Ortsvektor des Mittelpunktes M ist.

Aufgabe 11:

In folgenden Schritten erhält man den Spiegelpunkt P' von P bei der Spiegelung an E :

1. Schritt:

Aufstellen einer Hilfsgerade h , die senkrecht zur Ebene steht und durch den Punkt P verläuft (d.h. der Richtungsvektor von g entspricht dem Normalenvektor von E)

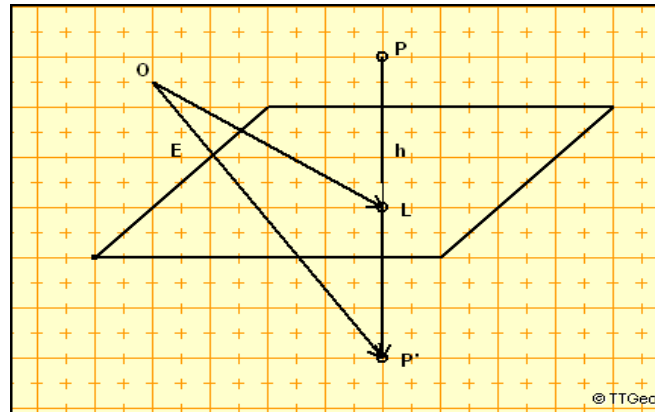
2. Schritt:

Berechnung des Schnittpunktes von der Hilfsgerade h mit der Ebene E . Hiermit erhält man den Lotfußpunkt L .

3. Schritt:

Vektorzugverfahren: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{PL}$

Die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{OP'}$ entsprechen den Punktkoordinaten des Punktes P' .

**Aufgabe 12:**

Zunächst wird die Gleichung einer Hilfsebene E aufgestellt, die orthogonal zur Geraden g ist (Normalenvektor von E = Richtungsvektor von g) und den Punkt A enthält.

Anschließend wird der Schnittpunkt R der Geraden g und der Ebene E ermittelt.

R ist dann der Lotfußpunkt und der Abstand von A zum Lotfußpunkt R entspricht dem

Abstand der Geraden zum Punkt A . Der Abstand von R zu A wird ermittelt durch $\overline{RA} = |\overrightarrow{RA}|$.