

Abituraufgaben bis 2020 Baden-Württemberg

Stochastik
(Pfadregeln, Erwartungswert, Binomialverteilung)

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Februar 2021

Aufgabe 1: (Abiturprüfung 2020)

Auf einem Tisch liegen verdeckt vier rote und zwei schwarze Karten, mit denen Anna und Bernd das folgende Spiel spielen: Anna deckt in der ersten Runde nacheinander zwei Karten auf und legt sie nebeneinander auf den Tisch. Ist darunter mindestens eine schwarze Karte, dann gewinnt Anna und das Spiel ist beendet. Andernfalls deckt Bernd nacheinander zwei der übrigen Karten auf. Deckt er dabei mindestens eine schwarze Karte auf, so gewinnt er, ansonsten gewinnt Anna.

Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: Anna gewinnt das Spiel in der ersten Runde.

B: Anna gewinnt das Spiel.

Aufgabe 2: (Abiturprüfung 2019)

In einer Urne sind eine rote, eine weiße und drei schwarze Kugeln. Es wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis man eine schwarze Kugel zieht.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Man zieht genau zwei Kugeln“.

B: „Unter den gezogenen Kugeln befindet sich die rote Kugel“.

Aufgabe 3: (Abiturprüfung 2018)

Zwei ideale Würfel werden gleichzeitig geworfen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei verschiedene Augenzahlen fallen.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine „1“ und eine „2“?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigen die Würfel zwei aufeinanderfolgende Zahlen?

Aufgabe 4: (Abiturprüfung 2017)

In einer Urne liegen drei rote, zwei grüne und eine blaue Kugel. Es werden so lange nacheinander einzelne Kugeln gezogen und zur Seite gelegt, bis man eine rote Kugel erhält. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man höchstens drei Kugeln zieht.

Aufgabe 5: (Abiturprüfung 2016)

Bei einem Glücksrad werden die Zahlen 1, 2, 3 und 4 bei einmaligem Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt:

Zahl	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,1	0,3	0,2

a) Das Glücksrad wird einmal gedreht.

Geben Sie zwei verschiedene Ereignisse an, deren Wahrscheinlichkeit jeweils 0,7 beträgt.

b) An dem Glücksrad sollen nur die Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2 so verändert werden, dass das folgende Spiel fair ist:

Für einen Einsatz von 2,50 € darf man einmal am Glücksrad drehen.

Die angezeigte Zahl gibt den Auszahlungsbetrag in Euro an.

Bestimmen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2.

Aufgabe 6: (Abiturprüfung 2015)

Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden:

Rot: 20%

Grün: 30%

Blau: 50%

Das Glücksrad wird n -mal gedreht.

Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$P(X=k)$	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	...

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird.

c) Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann:
20, 25 oder 30

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 7: (Abiturprüfung 2014)

An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele.

a) Formulieren Sie ein Ereignis A , für das gilt:

$$P(A) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

b) Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zwei Mal ?

Aufgabe 8: (Abiturprüfung 2013)

Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

a) Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.

B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

b) Die neun Spielkarten werden gemischt und erneut verdeckt ausgelegt. Laura dreht nun so lange Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen, bis ein Ass erscheint. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.

Welche Werte kann X annehmen?

Berechnen Sie $P(X \leq 2)$.

Lösungen**Aufgabe 1:**

$P(A) = P(\text{mindestens eine schwarze Karte unter den ersten 2 Karten})$

$$= 1 - P(2 \text{ rote Karten}) = 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$P(B) = P(\text{Anna gewinnt das Spiel}) = P(\text{Gewinn in 1. Runde}) + P(\text{Gewinn in der 3. Runde})$

$$P(\text{Gewinn in 1. Runde}) = P(A) = \frac{3}{5}$$

$P(\text{Gewinn in 3. Runde}) = P(\text{Anna zieht zwei rote Karten und Bernd zieht zwei rote Karten})$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

$$P(B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 2:

$$\text{a) } P(A) = P(\text{zuerst nicht schwarz, dann schwarz}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$$\text{b) } P(B) = P(rs, rws, wrs) = P(rs) + P(rws) + P(wrs)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 3:

$$\text{a) } P(\text{„zwei verschiedene Augenzahlen“}) = 1 - P(\text{„zwei gleiche Augenzahlen“})$$

$$P(\text{„zwei gleiche Augenzahlen“}) = P(11) + P(22) + \dots + P(66) = 6 \cdot P(11) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{„zwei verschiedene Augenzahlen“}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\text{b) } P(\text{eine „1“ und eine „2“}) = P(12) + P(21) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

- c) Die Reihenfolge der aufeinanderfolgenden Zahlen spielt keine Rolle.
Es muss bei der Berechnung z.B. sowohl der Wurf „21“ als auch der Wurf „12“

$P(\text{zwei aufeinanderfolgende Zahlen})$

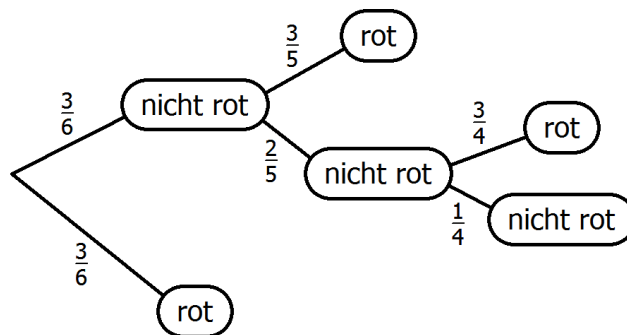
$$= P(12) + P(21) + P(23) + P(32) + P(34) + P(43) + P(45) + P(54) + P(56) + P(65)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 10 = \frac{5}{18}$$

Aufgabe 4:

Bei der Wahrscheinlichkeitsberechnung genügt es, zwischen „rot“ und „nicht rot“ zu unterscheiden.

Das ausführliche Baumdiagramm würde diese Gestalt haben:



Der Rechenaufwand für $P(\text{„höchstens drei Kugeln ziehen“})$ kann durch die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses verkleinert werden.

$$P(\text{„höchstens drei Kugeln ziehen“}) = 1 - P(\text{„mindestens vier Kugeln ziehen“})$$

$$= 1 - P(\text{dreimal „nicht rot“ ziehen}) = 1 - \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

Der direkte Weg sähe so aus:

$$P(\text{„höchstens drei Kugeln ziehen“}) = P(\text{rot}) + P(\text{nicht rot, rot}) + P(\text{nicht rot, nicht rot, rot})$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{3}{20} = \frac{19}{20}$$

Aufgabe 5:

- a) Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0,7:

A: "Es werden die Zahlen 1 oder 2 oder 4 gedreht" (bzw. "Es wird keine 3 gedreht")

B: "Es werden die Zahlen 1 oder 3 gedreht" (bzw. "Es wird eine ungerade Zahl gedreht")

- b) Für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten gelten nun:
- $P("1") = p$

Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss, ergibt sich daraus

$$P("2") = 1 - p - 0,3 - 0,2 = 0,5 - p$$

Die Zufallsvariable X sei die Auszahlung an den Spieler in Euro.

Das Spiel ist dann fair, wenn gilt: $E(X) = 2,50$ Euro.

$$\text{Es gilt: } E(X) = 1 \cdot p + 2 \cdot (0,5 - p) + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,2 = -p + 2,7$$

$$\text{Bedingung: } -p + 2,7 = 2,5 \Rightarrow p = 0,2$$

$$\text{Daraus folgt: } P("1") = 0,2 \text{ und } P("2") = 0,5 - 0,2 = 0,3$$

Aufgabe 6:

- a) X ist binomialverteilt, da es für jeden der n Versuche nur zwei Ausgänge gibt:

"Rot" (Treffer) und "Nicht Rot" (kein Treffer)

Außerdem ist die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer stets $p = 0,2$.

- b)
- $P(\text{mindestens dreimal rot}) =$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (0,01 + 0,06 + 0,14) = 1 - 0,21 = 0,79$$

- c) Bei
- $n = 20$
- würde
- $E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0,2 = 4$
- gelten.

Bei $n = 25$ wäre $E(X) = 5$ und bei $n = 30$ wäre $E(X) = 6$.Da gemäß Tabelle die größte Wahrscheinlichkeit bei 4 Treffern liegt, muss der Erwartungswert auch ungefähr 4 sein. Daher kommt nur $n = 20$ in Frage.**Aufgabe 7:**

- a) Die dargestellte Formel ergibt sich aus der Formel der Binomialverteilung:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Die Formel $P(A)$ setzt sich aus drei Summanden zusammen:

$$1. \text{ Summand} = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{ entspricht der obigen Formel mit } n = 10, k = 8, p = \frac{2}{3}$$

Dieser stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit der man bei 10 Spielen am Automaten bei einer Verlustwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ genau 8 Spiele verliert.

$$2. \text{ Summand} = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} \text{ entspricht der obigen Formel mit } n = 10, k = 9, p = \frac{2}{3}$$

Hinweis: Der 2.Summand lautet ausführlich $\binom{10}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3}$, da $\binom{10}{9} = 10$ ist

Dieser stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit der man bei 10 Spielen am Automaten bei einer Verlustwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ genau 9 Spiele verliert.

3.Summand = $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ entspricht der obigen Formel mit $n = 10$, $k = 10$, $p = \frac{2}{3}$

Hinweis: Der 3.Summand lautet ausführlich $\binom{10}{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0$, da $\binom{10}{10} = 1$ und $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

Dieser stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit der man bei 10 Spielen am Automaten bei einer Verlustwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ genau 10 Spiele verliert.

Fazit: Ereignis A heißt, dass man bei 10 Spielen am Automaten bei einer Verlustwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ mindestens 8 verliert.

- b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der verlorenen Spiele am Automaten an.

X ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = \frac{2}{3}$.

$$\text{Es ist } P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = 6 \cdot \frac{4}{81} = \frac{8}{27}$$

Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{27}$ verliert der Spieler genau zwei von vier Spielen.

Aufgabe 8:

- a) Es handelt sich um eine Ziehung ohne Zurücklegen:

$$P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$$

Erklärung: Die Spielkarten müssen nur unterschieden werden in Asse und „Nicht-Asse“
Bei der ersten Ziehung sind 5 von 9 Karten „Nicht-Asse“, bei der zweiten Ziehung sind 4 von 8 Karten „Nicht-Asse“

Zur Veranschaulichung könnte man auch ein Baumdiagramm heranziehen.

$$P(B) = P(\text{erst Dame dann Ass}) + P(\text{erst Ass dann Dame}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{9}$$

- b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.

X kann die Werte von 1, 2, 3, 4, 5, 6 annehmen.

Begründung: Wenn gleich beim ersten Mal ein Ass aufgedeckt wird, ist $X = 1$.

Da spätestens die sechste Karte ein Ass sein muss (davor können die drei Könige und die zwei Damen aufgedeckt werden) kann X maximal den Wert 6 annehmen.

$$P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{13}{18}$$

Begründung für $P(X=2)$: zunächst muss ein Nicht-Ass gezogen werden und dann ein Ass.