Abituraufgaben bis 2020 von Baden-Württemberg

Kurvendiskussion

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2021

Aufgabe 1: (Abiturprüfung 2018)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x^2 - 4x + 5$. F ist eine Stammfunktion von f.
Bestimmen Sie die Stelle, an der die Graphen von F und f parallele Tangenten besitzen.

Aufgabe 2: (Abiturprüfung 2017)
Sind folgende Aussagen wahr ? Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.
(1) Jede Funktion, deren Ableitung eine Nullstelle hat, besitzt eine Extremstelle.
(2) Jede ganzrationale Funktion vierten Grades hat eine Extremstelle.

Aufgabe 3: (Abiturprüfung 2016)
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt.

Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt ist.

Aufgabe 4: (Abiturprüfung 2015)
Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und an der Stelle x = 2 die Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 12$.
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

Aufgabe 5: (Abiturprüfung 2014)

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2$.

a) Beschreiben Sie, wie man den Graphen von g aus dem Graphen von f erhält.
b) Bestimmen Sie die Nullstellen von g für $0 \le x \le 4$

Aufgabe 6: (Abiturprüfung 2013)

Gibt es eine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph drei Wendepunkte besitzt ?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7: (Abiturprüfung 2012)
Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x}$ und g mit $g(x) = 2x - 3$.

Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der beiden zugehörigen Graphen.
Untersuchen Sie, ob sich die beiden Graphen senkrecht schneiden.

Aufgabe 8: (Abiturprüfung 2011)
Gegeben sind die Funktion f und g mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = -e^{-x} + 2$.
a) Beschreiben Sie, wie das Schaubild von g aus dem Schaubild von f entsteht.
b) Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder von f und g im Punkt P(0/1) berühren.

Aufgabe 9: (Abiturprüfung 2010)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1-4x^2}{x^2}$. Ihr Schaubild ist K.

a) Geben Sie die Asymptoten von K an.
b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente an K im Punkt P(1/f(1)) mit der x-Achse.

Aufgabe 10: (Abiturprüfung 2009)

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x)=-x^3+3x^2-x-3$ besitzt einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 11: (Abiturprüfung 2008)

Für eine ganzrationale Funktion h zweiten Grades gilt: T(-1/-4) ist Tiefpunkt und Q(2/5) ein weiterer Punkt ihres Schaubilds. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von h.

Aufgabe 12: (Abiturprüfung 2007)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

a) Bestimmen Sie die Punkte des Schaubildes von f mit waagrechter Tangente.
b) Das Schaubild von f hat im Punkt $P(1/\frac{1}{2})$ die Normale n. Ermitteln Sie eine Gleichung von n.

Aufgabe 13: (Abiturprüfung 2006)

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt H(1/1) ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 14: (Abiturprüfung 2005)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=4-\frac{4}{x^2}$; $x\neq 0$.

Geben Sie die Asymptoten des Schaubilds von f an.
Skizzieren Sie damit das Schaubild von f.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Normalen im Punkt P(2/f(2)).

Aufgabe 15: (Abiturprüfung 2004)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{2}{x}+2$; $x\neq 0$.

Das Schaubild von f hat im Punkt P(1/v) die Tangente t.
Ermitteln Sie eine Gleichung von t.
Die Tangente t schneidet die x-Achse im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Lösungen

Aufgabe 1:
Die Tangentensteigungen an den Graphen der Stammfunktion F wird durch $F'(x) = f(x)$ berechnet.
Die Tangentensteigungen an den Graphen der Funktion f wird durch $f'(x)$ berechnet.

Bedingungen für Stelle mit parallelen Tangenten (gleiche Steigung): $f(x) = f'(x)$

Es gilt $f'(x) = 8x - 4$

Bedingung: $4x^2 - 4x + 5 = 8x - 4$

$$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \Rightarrow x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8} = 1{,}5$$

Die gesuchte Stelle ist x = 1,5.

Aufgabe 2:

(1) Die Aussage ist falsch. Wenn die Ableitungsfunktion eine Nullstelle besitzt, kann es sich auch um eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel handeln. In diesem Fall besitzt das Schaubild von f an dieser Stelle einen Sattelpunkt. Beispiel: $f(x) = x^3$

(2) Die Aussage ist wahr. Die Ableitungsfunktion einer Funktion vierten Grades ergibt eine Funktion dritten Grades. Da jede Funktion dritten Grades (und damit auch die Ableitungsfunktion) mindestens eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel besitzt, besitzt die Funktion f(x) mindestens eine Extremstelle.

Hinweis: In der Aufgabenstellung wird formuliert: „…hat eine Extremstelle.“
Diese Formulierung ist nicht so zu verstehen, dass es sich um GENAU EINE Extremstelle handeln muss.
„…eine Extremstelle“ ist als „MINDESTENS EINE Extremstelle“ zu verstehen.

Aufgabe 3:
Berechnung der Wendestelle der Funktion $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$

Es gilt $f'(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 1$ und $f''(x) = -x + 2$

Notwendige Bedingung für eine Wendestelle: $f''(x) = 0$
$\Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Da gemäß Aufgabenstellung vorgegeben ist, dass die Funktion f einen Wendepunkt besitzt, kann die hinreichende Bedingung weggelassen werden.

Gleichung der Tangente an der Stelle x = 2: $y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$

Es gilt $f(2) = -\frac{1}{6} \cdot 8 + 4 - 2 = \frac{2}{3}$ und $f'(2) = -0{,}5 \cdot 4 + 4 - 1 = 1$

Einsetzen in die Tangentengleichung: $y = 1 \cdot (x-2) + \frac{2}{3} \Rightarrow y = x - \frac{4}{3}$

Die Tangentengleichung entspricht der in der Aufgabenstellung angegebenen Gerade.

Aufgabe 4:

Ansatz für die Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Aufstellen der Bedingungen:
Ursprung liegt auf Schaubild: $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
Hochpunkt bei x = 0: $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Steigung der Tangente an der Stelle x = 2 ist 4: $f'(2) = 4 \Rightarrow 12a + 4b + c = 4$ (*)

Einsetzen von x = 2 in die Tangentengleichung ergibt $y = 4 \cdot 2 - 12 = -4$
Bedingung: $f(2) = -4 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = -4$ (**)

Einsetzen von d = 0 und c = 0 in (*) und (**) ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcrl} 12a & +4b & = & 4 & (1) \\ 8a & +4b & = & -4 & (2) \end{array}$$

(1) - (2) ergibt $4a = 8 \Rightarrow a = 2$
Einsetzen von a = 2 in (2): $16 + 4b = -4 \Rightarrow 4b = -20 \Rightarrow b = -5$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = 2x^3 - 5x^2$

Aufgabe 5:

a) Der Graph von f wird mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt.
Anschließend wird er mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$ in x-Richtung gestreckt.
Danach wird er um 2 Längeneinheiten nach unten verschoben.

b) Nullstellen von g: $g(x) = 0$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$$

Die Funktion $y = \cos(x)$ nimmt an den Stellen x = 0, 2π, $4\pi, \ldots$ den Wert 1 an.

$\frac{\pi}{2}x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

$\frac{\pi}{2}x = 2\pi \Rightarrow x_2 = 4$

Im gegebenen Intervall gibt es daher zwei Nullstellen x = 0 und x = 4.

Aufgabe 6:
Eine solche Funktion gibt es nicht.
Begründung: Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt lautet $f''(x) = 0$.
Die zweite Ableitungsfunktion einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist eine Funktion zweiten Grades.
Die Gleichung $f''(x) = 0$ ist daher eine quadratische Gleichung, die maximal zwei Lösungen besitzt.
Somit kann eine ganzrationale Funktion vierten Grades höchstens zwei Wendepunkte besitzen.

Aufgabe 7:
Die gemeinsamen Punkte ergeben sich durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{2}{x} = 2x - 3 \quad | \cdot x$$

$$\Rightarrow 2 = 2x^2 - 3x \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$ und damit x = 2 oder x = -0,5.

Mit $f(2) = 1$ und $f(-0,5) = -4$ ergeben sich als gemeinsame Punkte P(2/1) und Q(-0,5/-4).

Bedingung für einen senkrechten Schnitt in P: $f'(2) \cdot g'(2) = -1$

Mit $f'(x) = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$ und $g'(x) = 2$ folgt $f'(2) \cdot g'(2) = -0,5 \cdot 2 = -1$.
Somit schneiden sich die Graphen in P senkrecht.

Bedingung für einen senkrechten Schnitt in Q: $f'(-0,5) \cdot g'(-0,5) = -1$
$f'(-0,5) \cdot g'(-0,5) = -8 \cdot 2 = -16$
Somit schneiden sich die Graphen in Q nicht senkrecht.

Aufgabe 8:
a) $e^x \to e^{-x} \to -e^{-x} \to -e^{-x} + 2$

Zunächst erfolgt eine Spiegelung an der y-Achse. Als nächstes erfolgt eine Spiegelung an der x-Achse. Zum Schluss wird das Schaubild noch um 2 Einheiten nach oben verschoben.
Fazit: g entsteht aus f durch Spiegelung an beiden Koordinatenachsen und Verschiebung um 2 Einheiten nach oben.

b) Eine Berührung an der Stellle x liegt vor, wenn $f(x) = g(x)$ und $f'(x) = g'(x)$ gilt.
$f(0) = e^0 = 1$ und $g(0) = -e^0 + 2 = 1$, also $f(0) = g(0) = 1$.
$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$ und $g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g'(0) = 1$ also $f'(0) = g'(0) = 1$
Damit ist gezeigt, dass sich die Schaubilder von f und g im Punkt P(0/1) berühren.

Aufgabe 9:

a) Das Schaubild von $f(x)=\frac{1-4x^2}{x^2}$ besitzt eine Defintionslücke bei x = 0.

Für $x \to 0$ strebt $f(x) \to +\infty$ (egal, ob man sich von links oder rechts der 0 annähert). Somit liegt bei x = 0 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vor und damit ist **x = 0 eine senkrechte Asymptote.**

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

Es gilt $f(x)=\frac{1-4x^2}{x^2}=\frac{x^2\cdot(\frac{1}{x^2}-4)}{x^2}=\frac{1}{x^2}-4$

Für $x \to \pm\infty$ strebt der Bruch $\frac{1}{x^2} \to 0$.

Daher gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-4$.

Das Schaubild K besitzt die **waagrechte Asymptote y = -4.**

b) Um den Schnittpunkt zu bestimmen, muss zunächst die Tangentengleichung in P aufgestellt werden.

Berechnung der Koordinaten von P: $f(1)=\frac{1-4}{1}=-3$ und damit P(1/-3).

Mit $f(x)=\frac{1}{x^2}-4=x^{-2}-4$ (siehe a)) folgt $f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$.

Tangentensteigung in P: $f'(1)=-2$

Einsetzen von P und m in die Punkt-Steigungs-Form:
$y-(-3)=-2\cdot(x-1) \Rightarrow y=-2x-1$ ist die Gleichung der Tangente in P

Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse:
Setze die Tangentengleichung = 0: $0=-2x-1 \Rightarrow x=-0{,}5$
Der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse lautet S(-0,5/0).

Aufgabe 10:

$f(x)=-x^3+3x^2-x-3 \Rightarrow f'(x)=-3x^2+6x-1 \Rightarrow f''(x)=-6x+6 \Rightarrow f'''(x)=-6$

Berechnung des Wendpunktes: $f''(x)=0 \Leftrightarrow -6x+6=0 \Leftrightarrow x=1$
Da $f'''(1)=-6 \neq 0$ existiert bei x = 1 eine Wendestelle.
Mit $f(1)=-2$ folgt WP(1/-2).
Die Steigung der Tangente im Wendepunkt beträgt $f'(1)=2$.
Aufstellen der Tangentengleichung mit $y=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$ mit u = 1:
$y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1) \Rightarrow y=2(x-1)+(-2) \Rightarrow y=2x-4$

Aufgabe 11:
Die Funktion kann mit zwei unterschiedlichen Ansätzen aufgestellt werden.

1.Möglichkeit:
Bei der Funktion handelt es sich um eine Parabel mit Scheitelpunkt T(-1/-4).
Somit kann die Parabel in der so genannten Scheitelform aufgestellt werden (lernt man in der Mittelstufe): $h(x) = a \cdot (x+1)^2 - 4$

Den Wert von a erhält man mit dem Punkt Q(2/5): $5 = a \cdot (2+1)^2 - 4 \Rightarrow a = 1$

Daraus folgt: $h(x) = (x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x - 3$

2.Möglichkeit:
Allgemeiner Ansatz für ganzrationale Funktion 2.Grades: $h(x) = ax^2 + bx + c$
mit $h'(x) = 2ax + b$
Bedingungen:
Punkt T(-1/-4) liegt auf dem Schaubild: $h(-1) = -4 \Rightarrow a - b + c = -4$
An der Stelle x = -1 ist die Steigung 0: $h'(-1) = 0 \Rightarrow -2a + b = 0$
Punkt Q(2/5) liegt auf dem Schaubild: $h(2) = 5 \Rightarrow 4a + 2b + c = 5$
Die Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt a = 1, b = 2, c = -3.
Damit gilt: $h(x) = x^2 + 2x - 3$.

Aufgabe 12:

Umschreiben der Funktion: $f(x) = \frac{x^2}{x+1} = x^2 \cdot \left(x+1\right)^{-1}$

Ableitung mit Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = 2x \cdot \left(x+1\right)^{-1} + x^2 \cdot (-1)(x+1)^{-2} = \frac{2x}{x+1} - \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

a) Punkte mit waagrechter Tangente:

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow$ x = 0 oder x = -2.

A(0/0) und B(-2/-4) besitzen eine waagrechte Tangente.

b) Gleichung der Normalen n im Punkt $P(1/\frac{1}{2})$:

Allgemeine Normalengleichung: $y = -\frac{1}{f'(u)}(x-u) + f(u)$

Setze u = 1 in die Normalengleichung ein.
Es gilt $f'(1) = 0{,}75$ und f(1) = 0,5.

Normalengleichung: $y = -\frac{1}{0{,}75}(x-1) + 0{,}5 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{6}$

Aufgabe 13:

Ansatz für die Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Es werden nun 4 Bedingungen benötigt, um die 4 unbekannten Parameter a,b,c,d zu bestimmen.

Punktbedingungen:

$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

$f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1$ (*)

Steigungsbedingungen:

$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (Berührung der x-Achse im Ursprung bedeutet gleiche Steigung wie die x-Achse)

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$ (**)

Aus (*): $a + b = 1$
Aus (**): $3a + 2b = 0$

Mit Hilfe des Additionsverfahrens erhält man daraus b = 3 und a = -2

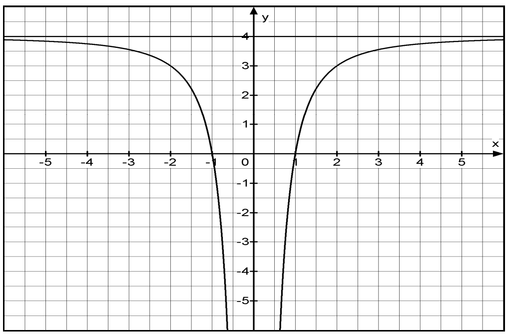
Funktionsgleichung: $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Aufgabe 14:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$; $x \neq 0$.

Die **waagrechte Asymptote** des Schaubildes ist die Gerade y = 4, da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 4$ gilt.

Die **senkrechte Asymptote** des Schaubildes ist die Gerade x = 0 (also die y-Achse), da bei x = 0 eine Definitionslücke vorliegt und sich beim Einsetzen von x = 0 in den Zähler des Bruches ein Wert $\neq 0$ ergibt. Da es sich um eine doppelte Nullstelle im Nenner handelt, besitzt die senkrechte Asymptote keinen Vorzeichenwechsel.



Normale im Punkt P(2/f(2)):

Ansatz: $y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$ mit u = 2

Die Normale ist die Senkrechte zur Tangente im Kurvenpunkt P.
y-Wert von P: $f(2) = 3$, also P(2/3).

$f(x) = 4 - 4x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 8x^{-3} = \frac{8}{x^3}$

Es gilt f(2) = 3 und $f'(2) = 1$

$y = -\frac{1}{1}(x-2) + 3 \Rightarrow y = -x + 5$

Aufgabe 15:

Funktionsgleichung $f(x) = \frac{2}{x} + 2 = 2 \cdot x^{-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = -2 \cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$.

Berechnung von v: $f(1) = \frac{2}{1} + 2 = 4$ und daher lautet der vollständige Punkt P(1/4).

Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ mit u = 1.

Es ist $f'(1) = -2$

Tangentengleichung: $y = -2(x-1) + 4 \Rightarrow y = -2x + 6$

Schnittpunkt der Tangente mit x-Achse:

Setze y = 0: $-2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$, also S(3/0)