

Abituraufgaben bis 2020 von Baden-Württemberg

Gleichungen

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2021

Aufgabe 1: (Abiturprüfung 2020)

Lösen Sie die Gleichung $(x^2 + 8) \cdot (e^{x-1} - 1) = 0$.

Aufgabe 2: (Abiturprüfung 2019)

Lösen Sie die Gleichung $(\cos(x))^2 + 2\cos(x) = 0$ für $0 \leq x \leq 2\pi$

Aufgabe 3: (Abiturprüfung 2017)

Lösen Sie die Gleichung $e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$

Aufgabe 4: (Abiturprüfung 2016)

Lösen Sie die Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x}$

Aufgabe 5: (Abiturprüfung 2015)

Lösen Sie die Gleichung $(x^3 - 3x) \cdot (e^{2x} - 5) = 0$

Aufgabe 6: (Abiturprüfung 2014)

Lösen Sie die Gleichung $x^4 = 4 + 3x^2$

Aufgabe 7: (Abiturprüfung 2013)

Lösen Sie die Gleichung $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$

Aufgabe 8: (Abiturprüfung 2012)

Lösen Sie für $0 \leq x \leq 2\pi$ die Gleichung $\sin(x) \cdot \cos(x) - 2\cos(x) = 0$.

Aufgabe 9: (Abiturprüfung 2011)

Lösen Sie die Gleichung $4e^{2x} + 6e^x = 4$.

Aufgabe 10: (Abiturprüfung 2009)

Lösen Sie die Gleichung $(2x^2 - 8) \cdot (e^{2x} - 6) = 0$.

Aufgabe 11: (Abiturprüfung 2008)

Lösen Sie die Gleichung $\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 1$ ($x \neq 0$).

Aufgabe 12: (Abiturprüfung 2007)

Lösen Sie die Gleichung $e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0$.

Aufgabe 13: (Abiturprüfung 2005)

Lösen Sie die Gleichung $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$.

Aufgabe 14: (Abiturprüfung 2004)

Lösen Sie die Gleichung $e^{4x} - 11e^{2x} + 18 = 0$.

Lösungen**Aufgabe 1:**

$$(x^2 + 8) \cdot (e^{x-1} - 1) = 0 \quad \text{Lösung der Gleichung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 = -8 \quad \text{Gleichung ist nicht lösbar}$$

$$\text{Gleichung II): } e^{x-1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x-1} = 1 \Rightarrow x - 1 = \ln(1) \Rightarrow x = \ln(1) + 1 = 1$$

Die Gleichung besitzt eine Lösung $x = 1$.

Aufgabe 2:

$$(\cos(x))^2 + 2\cos(x) = 0$$

$$\text{Ausklammern von } \cos(x) \text{ ergibt: } \cos(x) \cdot (\cos(x) + 2) = 0$$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt:

$$\text{I) } \cos(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{II) } \cos(x) + 2 = 0 \Rightarrow \cos(x) = -2 \quad \text{ist nicht lösbar}$$

Aufgabe 3:

$$e^{4x} - 5 = 4e^{2x} \Rightarrow e^{4x} - 4e^{2x} - 5 = 0 \quad \text{Substitution: } u = e^{2x}$$

$$\text{Daraus folgt } u^2 - 4u - 5 = 0$$

$$\text{Lösung mit der a-b-c-Formel: } u_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$\text{Daraus folgt } u_1 = 5 \text{ und } u_2 = -1$$

$$\text{Rücksubstitution: } e^{2x} = 5 \Rightarrow 2x = \ln(5) \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln(5)$$

$$e^x = -1$$

$$\text{Lösungsmenge } L = \left\{ \frac{1}{2}\ln(5) \right\}$$

Aufgabe 4:

$$3 - e^x = \frac{2}{e^x} \quad | \cdot e^x$$

$$\Rightarrow 3e^x - e^{2x} = 2 \Rightarrow -e^{2x} + 3e^x - 2 = 0 \quad \text{Substitution: } u = e^x$$

$$\text{Daraus folgt } -u^2 + 3u - 2 = 0$$

$$\text{Lösung mit der a-b-c-Formel: } u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2}$$

Daraus folgt $u_1 = 1$ und $u_2 = 2$

Rücksubstitution: $e^x = 1 \Rightarrow x = \ln(1) = 0$

$$e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$$

Lösungsmenge $L = \{0 ; \ln(2)\}$

Aufgabe 5:

$$(x^3 - 3x) \cdot (e^{2x} - 5) = 0$$

Anwendung des Satzes vom Nullprodukt:

$$\text{Gleichung I) } x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 3) = 0$$

$$\text{Daraus folgt } x_1 = 0 ; x_2 = \sqrt{3} ; x_3 = -\sqrt{3}$$

$$\text{Gleichung II) } e^{2x} - 5 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 5 \Rightarrow 2x = \ln(5) \Rightarrow x = \frac{\ln(5)}{2}$$

Lösungsmenge $L = \{0 ; -\sqrt{3} ; \sqrt{3} ; \frac{\ln(5)}{2}\}$

Aufgabe 6:

Zunächst wird die Gleichung gleich Null gesetzt: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Mit der Substitution $x^2 = u$ folgt: $u^2 - 3u - 4 = 0$

$$\text{Anwendung der Lösungsformel: } u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow u_1 = 4 \text{ und } u_2 = -1$$

$$\text{Rücksubstitution: } x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x^2 = -1 \text{ ergibt keine Lösung.}$$

Lösungsmenge $L = \{-2; 2\}$

Aufgabe 7:

$$2e^x - \frac{4}{e^x} = 0 \quad | \cdot e^x \quad \Rightarrow 2e^{2x} - 4 = 0 \quad \Rightarrow 2e^{2x} = 4 \quad \Rightarrow e^{2x} = 2 \quad \Rightarrow 2x = \ln(2)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$$

Aufgabe 8:

Ausklammern von $\cos(x)$ ergibt: $\cos(x) \cdot (\sin(x) - 2) = 0$

Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt: $\cos(x) = 0$ oder $\sin(x) - 2 = 0$

$$\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ oder } x = \frac{3}{2}\pi$$

$\sin(x) - 2 = 0 \Rightarrow \sin(x) = 2$ ist nicht lösbar (da $\sin(x)$ maximal 1 werden kann)

Lösungsmenge: $L = \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$

Aufgabe 9:

$$4e^{2x} + 6e^x = 4 \Leftrightarrow 4e^{2x} + 6e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$$

Substitution: $u = e^x$

Daraus folgt $2u^2 + 3u - 2 = 0$

$$\text{Lösung der quadratischen Gleichung: } u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$u_1 = 0,5 \text{ und } u_2 = -2$$

Rücksubstitution: $0,5 = e^x \Rightarrow x = \ln(0,5)$

$-2 = e^x$ daraus ergibt sich keine Lösung.

Lösungsmenge: $L = \{ \ln(0,5) \}$

Aufgabe 10:

$$(2x^2 - 8) \cdot (e^{2x} - 6) = 0$$

Das Produkt ist genau dann 0, wenn einer der beiden Faktoren 0 ergibt:

$$1.\text{Faktor: } 2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$2.\text{Faktor: } e^{2x} - 6 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 6 \Leftrightarrow 2x = \ln 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln 6$$

$$\text{Lösungsmenge: } L = \{ 2 ; -2 ; \frac{1}{2} \ln 6 \}$$

Aufgabe 11:

$$\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 1 \quad | \cdot x^4$$

$$6 + x^2 = x^4 \Rightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0$$

$$\text{Substitution: } u = x^2 \Rightarrow u^2 - u - 6 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Daraus folgt $u_1 = 3$ und $u_2 = -2$

$$\text{Rücksubstitution: } x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$$

$$x^2 = -2 \Rightarrow \text{nicht rücksubstituierbar}$$

$$\text{Daraus folgt } L = \{ \sqrt{3}, -\sqrt{3} \}$$

Aufgabe 12:

$$e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0$$

Zunächst wird mit e^x durchmultipliziert, um den Bruch aufzulösen:

$$\Rightarrow e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$$

$$\text{Substitution: } u = e^x \Rightarrow u^2 - 2u - 15 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$$u_1 = 5 \text{ und } u_2 = -3$$

$$\text{Rücksubstitution: } e^x = 5 \Rightarrow x = \ln 5$$

$$e^x = -3 \Rightarrow \text{nicht lösbar und somit Lösungsmenge: } L = \{ \ln 5 \}$$

Aufgabe 13:

$$x^5 - 3x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^4 - 3x^2 - 4) = 0$$

Da x ausgeklammert werden kann, gilt $x_1 = 0$.

Nun muss noch die Gleichung $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ gelöst werden. Es handelt sich dabei um eine biquadratische Gleichung, die mit Hilfe der Substitution gelöst wird:

$$x^2 = u \Rightarrow u^2 - 3u - 4 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \text{ und damit } u_1 = 4 \text{ und } u_2 = -1$$

$$\text{Rücksubstitution: } u_1 = 4 \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$u_2 = -1 \Rightarrow -1 = x^2 \text{ kann nicht gelöst werden.}$$

Also Lösungsmenge $L = \{ 0; -2; 2 \}$

Aufgabe 14:

$$e^{4x} - 11e^{2x} + 18 = 0$$

$$\text{Substitution: } e^{2x} = u$$

$$\text{Daraus folgt: } u^2 - 11 \cdot u + 18 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{2} = \frac{11 \pm 7}{2} \text{ damit } u_1 = 9, u_2 = 2$$

$$\text{Rücksubstitution: } 9 = e^{2x} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \ln 9 = \ln 9^{0.5} = \ln 3$$

$$2 = e^{2x} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \ln 2$$