

Abituraufgaben bis 2020 von Baden-Württemberg

Stammfunktion und Integral

allgemeinbildende Gymnasien

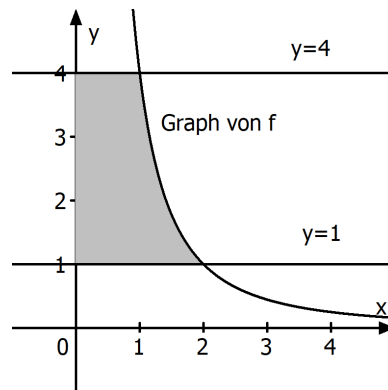
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2021

Aufgabe 1: (Abiturprüfung 2020)

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2}$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ im Punkt $P(1|4)$ und die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ im Punkt $Q(2|1)$. Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

**Aufgabe 2: (Abiturprüfung 2020)**

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4x-7}$, für die $F(2) = 1$ ist.

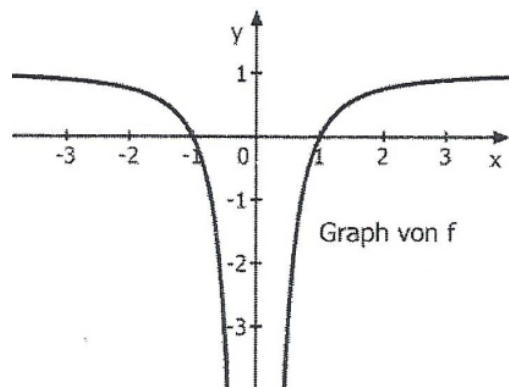
Aufgabe 3: (Abiturprüfung 2019)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, die die

Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat.

Die Abbildung zeigt den Graphen von f , der symmetrisch bezüglich der y -Achse ist.

Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.



- Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x -Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.
- Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f , die x -Achse und die Gerade g einschließen.

Aufgabe 4: (Abiturprüfung 2018)

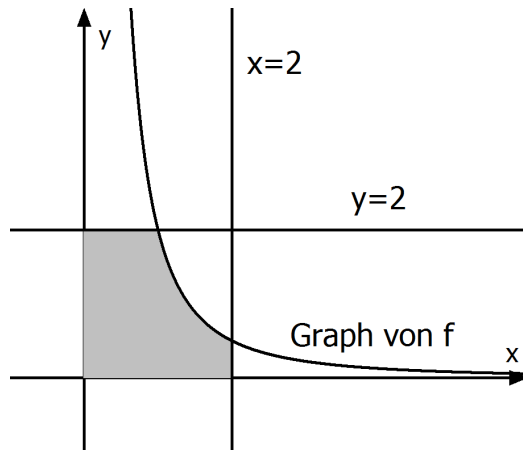
Untersuchen Sie, ob der Wert des Integrals $\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2} dx$ ganzzahlig ist.

Aufgabe 5: (Abiturprüfung 2017)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{2}{x^2} ; x > 0.$$

Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

**Aufgabe 6: (Abiturprüfung 2016)**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{48}{(2x-4)^3}$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(3) = 1$.

Aufgabe 7: (Abiturprüfung 2015)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi} \left(4x - \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \right) dx$

Aufgabe 8: (Abiturprüfung 2014)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3} dx$

Aufgabe 9: (Abiturprüfung 2013)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 \sin(2x)$

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(\pi) = 7$.

Aufgabe 10: (Abiturprüfung 2013)

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 11: (Abiturprüfung 2012)

Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = 2e^{4x} + \frac{3}{x^2}$

Aufgabe 12: (Abiturprüfung 2011)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 (2x-1)^4 dx$

Aufgabe 13: (Abiturprüfung 2010)

Berechnen Sie das Integral $\int_1^e \left(\frac{2}{x} + 4x \right) dx$

Aufgabe 14: (Abiturprüfung 2009)

Berechnen Sie das Integral $\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) dx$

Aufgabe 15: (Abiturprüfung 2008)

G ist eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = 2 - 3 \cdot \sin(4x)$.

Der Punkt P(0/1) liegt auf dem Schaubild von G. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von G.

Aufgabe 16: (Abiturprüfung 2007)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\ln 2} e^{2x} dx$.

Aufgabe 17: (Abiturprüfung 2006)

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^3$ an.

Aufgabe 18: (Abiturprüfung 2005)

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = 4 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}x^4$.

Aufgabe 19: (Abiturprüfung 2004)

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin(2x)$ an.

Lösungen**Aufgabe 1:**

Zur Berechnung des Flächeninhalts wird die Fläche aufgeteilt:

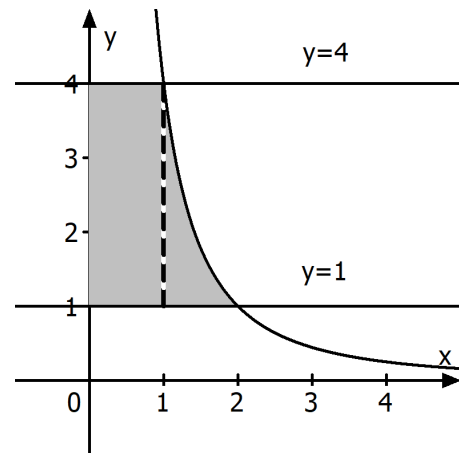
Linke Fläche:

$$A_1 = A_{\text{Rechteck}} = 1 \cdot 3 = 3$$

Rechte Fläche:

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_1^2 (f(x) - 1) dx = \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - 1 \right) dx = \int_1^2 (4x^{-2} - 1) dx \\ &= \left[-\frac{4}{x} - x \right]_1^2 = (-2 - 2) - (-4 - 1) = -4 + 5 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Gesamtfläche: } A = A_1 + A_2 = 3 + 1 = 4$$

**Aufgabe 2:**

Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{4x-7} = (4x-7)^{\frac{1}{2}}$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot (4x-7)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4} + C = \frac{1}{6} \cdot (4x-7)^{\frac{3}{2}} + C$$

Berechnung von C, so dass gilt: $F(2) = 1$

$$F(2) = \frac{1}{6} \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} + C \quad (\text{Hinweis: } 1^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1^3} = 1)$$

$$\text{Bedingung: } \frac{1}{6} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{5}{6}$$

$$\text{Die gesuchte Stammfunktion lautet } F(x) = \frac{1}{6} \cdot (4x-7)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{6}$$

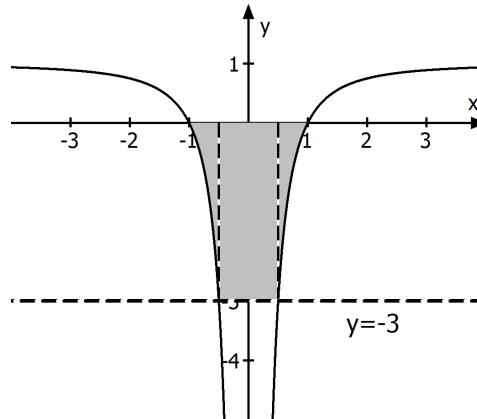
Aufgabe 3:

a) Nachweis, dass der Graph von f die Gerade $y = -3$ an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ schneidet:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 - 4 = -3$$

Damit liegt der Punkt $P\left(\frac{1}{2} \mid -3\right)$ auf dem Graphen von f und auf der Geraden $y = -3$.

b) Berechnung der Fläche:



Die gesuchte Fläche kann in drei Teile aufgeteilt werden.

Die mittlere Fläche ist ein Rechteck mit dem Inhalt $A_1 = 1 \cdot 3 = 3$

Die linke und die rechte Fläche sind gleich groß.

Berechnung der rechten Fläche:

$$\int_{0,5}^1 f(x) dx = \int_{0,5}^1 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_{0,5}^1 (1 - x^{-2}) dx = \left[x + \frac{1}{x} \right]_{0,5}^1 = 1 + \frac{1}{1} - (0,5 + 2) = -0,5$$

Inhalt der rechten Fläche: $A_2 = 0,5$

Der gesamte Flächeninhalt beträgt $A = A_1 + 2 \cdot A_2 = 3 + 2 \cdot 0,5 = 4$

Aufgabe 4:

$$\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2} dx = [\ln(x-2)]_3^{e+2} = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

Damit ist der Wert des Integrals ganzzahlig.

Aufgabe 5:

Berechnung der Schnittstelle von $f(x) = \frac{2}{x^2}$ mit der waagrechten Geraden $g(x) = 2$

$$\frac{2}{x^2} = 2 \quad \cdot x^2 \Rightarrow 2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Da $x > 0$ ist, lautet die Schnittstelle $x = 1$.

Der Inhalt der markierten Fläche muss in zwei Teile aufgeteilt werden (Rechteck und Restfläche)

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{Rechteck}} + \int_1^2 f(x) dx = 1 \cdot 2 + \int_1^2 2x^{-2} dx = 2 + \left[-2x^{-1} \right]_1^2 = 2 + \left[-\frac{2}{x} \right]_1^2 = 2 + \left(-\frac{2}{2} - \left(-\frac{2}{1} \right) \right) \\ &= 2 + (-1 + 2) = 3 \text{ Flächeneinheiten} \end{aligned}$$

Aufgabe 6:

Zunächst wird die Funktionsgleichung von f umgeformt:

$$f(x) = \frac{48}{(2x-4)^3} = 48 \cdot (2x-4)^{-3}$$

Die allgemeine Stammfunktion lautet $F(x) = 48 \cdot \frac{1}{-2} (2x-4)^{-2} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{-12}{(2x-4)^2} + C$

Nun wird die Bedingung eingesetzt: $F(3) = 1 \Rightarrow \frac{-12}{(6-4)^2} + C = 1 \Rightarrow -3 + C = 1 \Rightarrow C = 4$

Die gesuchte Stammfunktion lautet $F(x) = \frac{-12}{(2x-4)^2} + 4$

Aufgabe 7:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left(4x - \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \right) dx &= \left[2x^2 + \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{0,5} \right]_0^{\pi} = \left[2x^2 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) \right]_0^{\pi} \\ &= 2\pi^2 + 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) - (0 + 2\cos(0)) = 2\pi^2 - 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 8:

$$\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3} dx = \int_0^1 4 \cdot (2x+1)^{-3} dx = \left[\frac{4}{-2} \cdot (2x+1)^{-2} \cdot \frac{1}{2} \right]_0^1 = \left[-\frac{1}{(2x+1)^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{9} - (-1) = \frac{8}{9}$$

Aufgabe 9:

Die allgemeine Stammfunktion lautet $F(x) = 4 \cdot (-\cos(2x)) \cdot \frac{1}{2} + C = -2 \cdot \cos(2x) + C$

Die Konstante C muss nun so gewählt werden, dass $F(\pi) = 7$ gilt:

Einsetzen der Bedingung ergibt

$$7 = -2 \cdot \cos(2\pi) + C$$

Da $\cos(2\pi) = 1$ ist, folgt $C = 9$. Die Stammfunktion lautet $F(x) = -2 \cdot \cos(2x) + 9$.

Aufgabe 10:

Um die Fläche zu bestimmen, werden zunächst die Schnittpunkte der Schaubilder von f(x) und g(x) berechnet:

Ansatz: $f(x) = g(x)$

$$-x^2 + 3 = 2x \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\text{Mit der Mitternachtsformel ergibt sich } x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2}$$

Als Lösungen folgen $x = -3$ und $x = 1$.

$$\int_{-3}^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-3}^1 (-x^2 + 3 - 2x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x - x^2 \right]_{-3}^1 = -\frac{1}{3} + 3 - 1 - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3) - 9 \right)$$

$$= \frac{5}{3} - (9 - 9 - 9) = \frac{5}{3} + 9 = \frac{32}{3}$$

Die gesuchte Fläche beträgt $A = \frac{32}{3} \text{ FE}$

Hinweis: Man hätte auch das Integral $\int_{-3}^1 (g(x) - f(x)) dx$ berechnen können.

Das Ergebnis dieses Integrals wäre dann $-\frac{32}{3}$. Da die Fläche jedoch eine positive Zahl sein muss, wäre die Antwort auch hier $A = \frac{32}{3} \text{ FE}$.

Aufgabe 11:

Zur Berechnung einer Stammfunktion von $f(x) = 2e^{4x} + \frac{3}{x^2}$ wird die Funktionsgleichung umgeschrieben in $f(x) = 2e^{4x} + 3 \cdot x^{-2}$

Die Gleichung einer Stammfunktion lautet $F(x) = \frac{2}{4}e^{4x} + \frac{3}{-1}x^{-1} = \frac{1}{2}e^{4x} - \frac{3}{x}$

Aufgabe 12:

$$\int_0^1 (2x-1)^4 dx = \left[\frac{1}{5} \cdot (2x-1)^5 \cdot \frac{1}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{10} \cdot (2-1)^5 - \frac{1}{10} \cdot (0-1)^5 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

Aufgabe 13:

$$\int_1^e \left(\frac{2}{x} + 4x \right) dx = \left[2 \cdot \ln(x) + 2x^2 \right]_1^e = 2 \cdot \ln(e) + 2e^2 - (2 \cdot \ln(1) + 2) = 2 + 2e^2 - 2 = 2e^2$$

Aufgabe 14:

$$\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) dx = \int_4^9 \left(2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) dx = \left[4 \cdot x^{\frac{1}{2}} - x \right]_4^9 = \left[4 \cdot \sqrt{x} - x \right]_4^9 = 4 \cdot 3 - 9 - (4 \cdot 2 - 4) = -1$$

Aufgabe 15:

Da das Schaubild der Stammfunktion G durch einen bestimmten Punkt verlaufen soll, muss die Stammfunktion mit der Integrationskonstanten C aufgestellt werden.

$$G(x) = 2x - 3 \cdot (-\cos(4x)) \cdot \frac{1}{4} + C = 2x + \frac{3}{4}\cos(4x) + C$$

Punktprobe P(0/1): $G(0) = \frac{3}{4} + C = 1 \Rightarrow C = 0,25$

Damit ergibt sich: $G(x) = 2x + \frac{3}{4}\cos(4x) + 0,25$

Aufgabe 16:

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} e^{\ln 4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Aufgabe 17:

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^3 = 4x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^3 \Rightarrow F(x) = 8x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}x^4 = 8 \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{8}x^4$$

Aufgabe 18:

Eine mögliche Stammfunktion von $f(x) = 4 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}x^4$ wäre

$$F(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{20}x^5 = 8 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{20}x^5$$

Aufgabe 19:

Um die Stammfunktion zu finden, muss die Funktion umgeschrieben werden:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin(2x) = x^{-2} + \sin(2x)$$

Berechnung einer Stammfunktion: $F(x) = -x^{-1} - \frac{1}{2}\cos(2x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cos(2x)$