

Hauptprüfung Abiturprüfung 2019

Baden-Württemberg

Teil 2: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Anwendungsorientierte Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

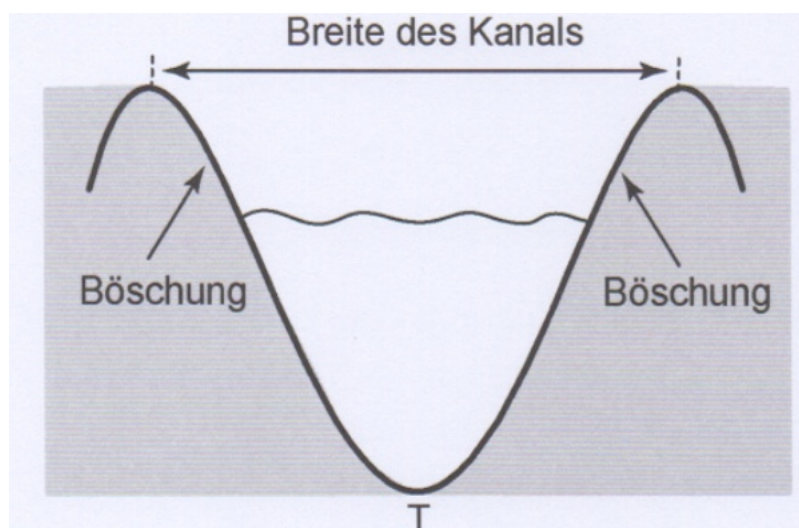
Juni 2019

Anwendungsorientierte Analysis

- 3 Ein Ingenieurbüro plant den Bau eines 15 Meter (m) langen, geraden Kanals, der einen gleichbleibenden Querschnitt aufweist. Das Koordinatensystem wird im Modell so gelegt, dass $T(0|0)$ den tiefsten Punkt des Querschnitts darstellt (siehe Abbildung). Die Randkurve des Querschnitts wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{4}x^2,$$

wobei x im Bereich der Breite des Kanals liegt und ebenso wie $f(x)$ in Meter gemessen wird. Die Abbildung stellt eine nicht maßstabgetreue Skizze des Schaubilds von f dar.



- 3.1 Berechnen Sie den höchstmöglichen Wasserstand und die Breite des Kanals. (3 Punkte)

- 3.2 Das Wasser steht im Kanal 2 m hoch.

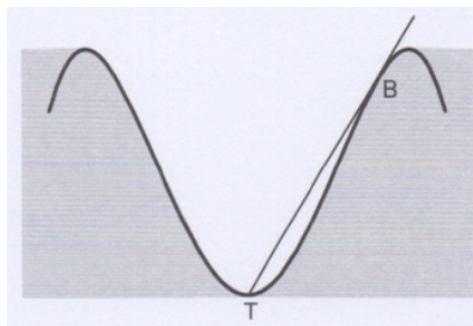
- 3.2.1 Zeigen Sie, dass der Wasserspiegel eine Breite von genau 4 m einnimmt. (1 Punkt)

- 3.2.2 Berechnen Sie den Wert von $15 \cdot \int_{-2}^2 (2 - f(x)) dx$.

Deuten Sie diesen Term und den berechneten Wert im Sachzusammenhang. (3 Punkte)

- 3.3

Ein Laser in der Position T wird so eingestellt, dass er einen Laserstrahl erzeugt, der in der Ebene des Kanalquerschnitts verläuft und dabei die rechte Böschung an einem Punkt $B(u|f(u))$ mit $u > 0$ berührt. Bestimmen Sie die Steigung a der Geraden mit der Gleichung $y = a \cdot x$, die diesen Lichtstrahl modelliert.



(3 Punkte)

Lösungen**3.1 Berechnen Sie den höchstmöglichen Wasserstand und die Breite des Kanals.**Berechnung der Hochpunkte von f :Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}\right) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

$$\text{Gleichung II): } -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

 $f''(0) = 1,5 > 0$, also Tiefpunkt $f''(\sqrt{6}) = -3 < 0$, also Hochpunkt $H(\sqrt{6} | f(\sqrt{6}))$ mit $f(\sqrt{6}) = 2,25$

Der höchstmögliche Wasserstand beträgt 2,25 m.

Die Breite des Kanals beträgt $2 \cdot \sqrt{6} \approx 4,90$ m.**3.2.1 Zeigen Sie, dass der Wasserspiegel eine Breite von genau 4 m einnimmt.**Es gilt $f(2) = 2$ und $f(-2) = 2$ Das heißt an den Stellen $x = 2$ und $x = -2$ ist der Kanalquerschnitt 2 m hoch.Damit ist der Wasserspiegel auf der Höhe 2 m $2 - (-2) = 4$ m breit.**3.2.2 Berechnen Sie den Wert von $15 \cdot \int_{-2}^2 (2 - f(x)) dx$.***Deuten Sie diesen Term und den berechneten Wert im Sachzusammenhang.*

$$15 \cdot \int_{-2}^2 (2 - f(x)) dx = 15 \cdot \int_{-2}^2 \left(2 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2\right) dx = 15 \cdot \left[2x + \frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{4}x^3\right]_{-2}^2$$

$$= 15 \cdot \left(4 + \frac{32}{80} - 2 - \left(-4 - \frac{32}{80} + 2\right)\right) = 72$$

Interpretation:

Bei einem Wasserstand von 2m enthält der 15m lange Abschnitt des Kanals ein Volumen von 72 m^3 .

- 3.3 Bestimmen Sie die Steigung a der Geraden mit der Gleichung $y = a \cdot x$, die diesen Lichtstrahl modelliert.

Der Lichtstrahl ist eine Tangente an das Schaubild von $f(x)$, die durch den Punkt $T(0|0)$ verläuft.

Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Einsetzen des Punktes $T(0|0)$ in die Tangentengleichung:

$$0 = f'(u) \cdot (0 - u) + f(u)$$

$$\Rightarrow 0 = \left(-\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u\right) \cdot (-u) - \frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{3}{16}u^4 - \frac{3}{4}u^2$$

$$\Rightarrow 0 = u^2 \cdot \left(\frac{3}{16}u^2 - \frac{3}{4}\right) \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I) $u = 0$ (laut Vorgabe $u > 0$, also keine Lösung)

Gleichung II): $\frac{3}{16}u^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow u^2 = 4 \Rightarrow u = \pm 2$ (laut Vorgabe $u > 0$, daher nur $u = 2$)

Der Laserstrahl verläuft durch den Punkt $B(2|f(2))$, also $B(2|2)$.

Die gesuchte Steigung der Geraden ist $a = \frac{f(2)}{2} = 1$.