Hauptprüfung Fachhochschulreife 2020

Baden-Württemberg

Pflichtteil

Hilfsmittel: keine

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe 1:

1.1 Berechnen Sie die zweite Ableitung der Funktion h mit

$h(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 \ , \quad x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Nullstellen der zweiten Ableitung h''. (6 Punkte)

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi x) + 2 \ ; \ -2 \le x \le 2$.
Geben Sie die Periode und die Amplitude von f an.
Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion. (5 Punkte)

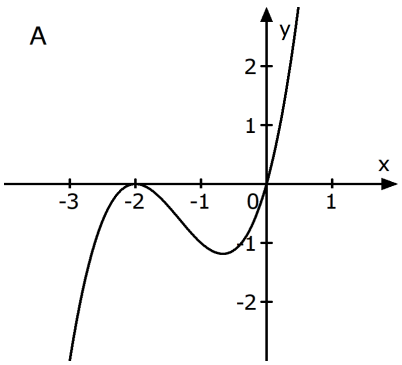
1.3 Lösen Sie die Gleichung $2e^{-3x} - 7 = 0$ (3 Punkte)

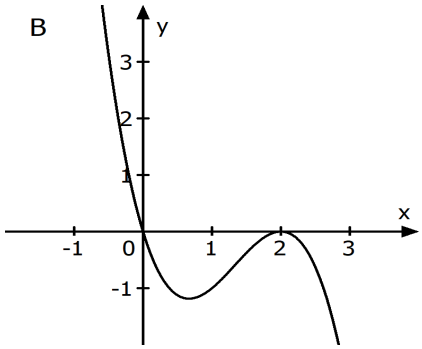
1.4 Zeigen Sie, dass das folgende lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & -4x_2 & +4x_3 & = & 6 \end{array}$$

(6 Punkte)

1.5 Begründen Sie jeweils, warum keines der beiden Schaubilder zur Funktion f mit $f(x) = x \cdot (x-2)^2$, $x \in \mathbb{R}$ gehören kann.





(4 Punkte)

1.6 Gegeben sind eine Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + 4$ und eine Gerade mit der Gleichung y = 8.
Skizzieren Sie die Parabel und die Gerade.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Parabel und der Gerade eingeschlossen wird.

(6 Punkte)

Lösung

1.1 $h(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^3-2x^2$

Ableitungen von h:

$h'(x)=\frac{4}{12}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x \;=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x$

$h''(x)=\frac{3}{3}x^2-\frac{6}{2}x-4=x^2-3x-4$

Nullstellen der zweiten Ableitung: $h''(x)=0$

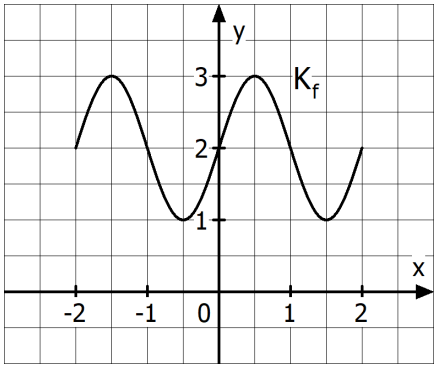
$x^2-3x-4=0 \quad \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot(-4)}}{2}=\frac{3\pm5}{2} \quad x_1=4$ und $x_2=-1$

1.2 $f(x)=\sin(\pi x)+2$

Amplitude: a = 1 (Faktor vor dem Sinusausdruck): $f(x)=1\cdot\sin(\pi x)+2$

Periode: $p=\frac{2\pi}{\pi}=2$ (gemäß Periodenformel)

Skizze:
Das Schaubild ist gegenüber der Grundsinusfunktion y = sin(x) um 2 Einheiten nach oben verschoben. Mithilfe der berechneten Amplitude 1 und der Periode p = 2 kann das Schaubild von f skizziert werden.



1.3 $2e^{-3x}-7=0 \quad | +7$

$\Leftrightarrow 2e^{-3x}=7 \quad | :2$

$\Leftrightarrow e^{-3x}=3{,}5 \quad | \ln$

$\Leftrightarrow -3x=\ln(3{,}5) \quad | :(-3)$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}\ln(3{,}5)$ oder $x=-\frac{\ln(3{,}5)}{3}$

1.4

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 4 \quad |\cdot(-2) \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & -4x_2 & +4x_3 & = & 6 \end{array} \qquad |\cdot(-2)$$

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 4 \\ & -5x_2 & +3x_3 & = & -1 \quad |\cdot(-2) \\ & -10x_2 & +6x_3 & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 4 \\ & -5x_2 & +3x_3 & = & -1 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Nach der Umrechnung des Gleichungssystems in eine Stufenform ergibt sich in der letzten Zeile die wahre Aussage 0 = 0. Diese Zeile kann zum Weiterrechnen weggelassen werden.
Das bedeutet, dass nur noch 2 Gleichungen mit 3 Variablen übrigbleiben.
Daraus folgt, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

1.5 Die Funktionsgleichung von f hat eine Produktdarstellung: $f(x) = x \cdot (x-2)^2$
Dadurch kann man sofort die Nullstellen und deren Vielfachheit ablesen.

Bedingung für Nullstellen: $f(x) = 0$
$x \cdot (x-2)^2 = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

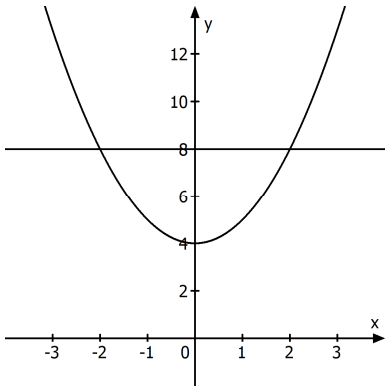
Gleichung I): $x = 0$ (einfache Nullstelle)
Gleichung II): $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ (doppelte Nullstelle)

Damit scheidet Schaubild A aus, da es nicht diese Nullstellen besitzt.

Es gilt $f(1) = 1 \cdot (1-2)^2 = 1$. Damit liegt der Punkt P(1|1) auf dem Schaubild von f.
An der Stelle x = 1 besitzt das Schaubild B einen Punkt, der sich unterhalb der x-Achse befindet.
Somit kann B nicht das Schaubild von der Funktion f sein.

1.6 Skizze der Parabel und der Gerade (ggf. mithilfe der Wertetabelle des WTR)

Die Gerade ist waagrecht auf der Höhe 8.
Die Parabel ist eine um 4 nach oben verschobene Normalparabel.



An dem Schaubild kann man ablesen, dass sich die waagrechte Gerade y = 8 und die Parabel an den Stellen x = -2 und x = 2 schneiden.

Die Berechnung des Flächeninhalts erfolgt über ein Integral.
Die Grenzen des Integrals sind die Schnittstellen der Gerade und der Parabel.
Um das Integral aufzustellen ist noch zu beachten, dass die obere Randkurve der Fläche die Gerade y = 8 ist und die untere Randkurve der Fläche die Parabel.

$$A = \int_{-2}^{2} (8 - f(x))dx = \int_{-2}^{2} (8 - \left(x^2 + 4\right))dx = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{32}{3} \text{ FE}$$

Hinweis:
Da das Flächenstück symmetrisch zur y-Achse verläuft, könnte man die Fläche auch mit dem Integral $A = 2 \cdot \int_{0}^{2} (8 - f(x))dx$ berechnen.